

様相定義可能性の意味論的特徴づけ

佐野 勝彦 (Katsuhiko Sano)

北陸先端科学技術大学院大学 情報科学研究科

本発表では、クリプキ構造への表現力を増した拡張様相論理のもつ表現力を「幾何学」的操作で特徴づける概念的発想を複数の具体例と共に説明する。

様相論理にクリプキ意味論を与えたとき、到達可能性の性質と様相論理式の間に対応関係があることはよく知られている。例えば、到達可能性 R の反射性と式 $\Box p \rightarrow p$ の間には、どんなクリプキ構造 (W, R) に対しても次の同値

$$R \text{ が反射性をみたく} \iff (W, R) \text{ で } \Box p \rightarrow p \text{ が妥当,}$$

が成り立つ。反射性は一階述語論理の式 $\forall x. xRx$ で書けるが、ゴルトブラット・トマソン (GT と略す) は、一階述語論理の言語で書けるクリプキ構造の性質 F が様相言語で定義できること (様相定義可能性) を、全射 p -モルフィズム像・生成部分構造・直和・超フィルター拡大というクリプキ構造の変形操作で特徴づけた [5]。ここで、超フィルター拡大とは、元々の構造に数多くの元を付け足して「飽和」した構造を作る操作である (クリプキ構造を様相代数とみなし、そのストーン表現をとる操作)。この結果は、三角形の合同という概念を平行移動・対称移動・回転移動で特徴づけるのと同じく、概念を不変に保つ「幾何学的」操作をその概念の本質として抽出する定理といえる。また、どのようなクリプキ構造の一階述語論理で書ける性質が様相定義可能でないかも上述の四つの変形操作により分かる。例えば、非反射性 $\forall x. \neg xRx$ は全射 p -モルフィズム像に閉じないため、様相定義可能でない。GT の証明は代数的手法によるものであったが、後にベンセム [1] がモデル理論的証明を与えた。

充足可能性判定の決定可能性を変えずに、クリプキ構造への表現力を増した拡張様相言語が複数提案されてきた。例えば、その一つのグレード付様相論理 [3] では、

$$\Diamond_k p \text{ が } w \text{ で真} \iff w \text{ から } R\text{-到達可能な世界うち少なくとも } k \text{ 個で } p \text{ が真,}$$

と真理条件をもつ可算個の演算子 \Diamond_k ($k \in \mathbb{N}$) が加えられる。クリプキ構造への表現力を増した個別の拡張様相論理に、上述の GT 式の特徴づけを与えることができれば、元々の様相論理との表現力の差異を「幾何学的」操作で捉えられる。

本発表では様相演算子による言語拡張のみに範囲を絞り、拡張様相論理に対する GT 式の特徴づけをモデル理論的証明で与える概念的発想が何かを説明したい。それは、多くの場合において、拡張様相論理に対する意味論的完全性の証明から「超フィルター拡大」相当の操作が抽出できる、という事実である。この発想により、その到

達可能性関係が二項関係 R と $=$ のブール結合となる様相演算子による拡張には、常に GT 式特徴づけが可能となる [9]。例えば、この特徴づけは

$$\begin{aligned} Dp \text{ が } w \text{ で真} &\iff w \text{ と異なるある世界で } p \text{ が真,} \\ Ep \text{ が } w \text{ で真} &\iff \text{ある世界で } p \text{ が真,} \\ \Box p \text{ が } w \text{ で真} &\iff p \text{ が真となるどんな世界へも } w \text{ から到達可能,} \end{aligned}$$

といった様相演算子による拡張を適用対象として含むため、これらの演算子に対する既存の GT 式特徴づけを系として含む [2, 4, 6]。一方、グレード付様相論理の様相演算子のもつ表現力は上述の特徴づけでは捉えられないが、ファイブ [3] による完全性証明を詳細に分析することで、「超フィルター拡大」相当の操作を抽出でき GT 式特徴づけを与えられる [8]。最後に、GT 式特徴づけを与える概念的発想が、クリプキ意味論を越えて、他のどのような余代数型意味論をもつ非古典論理に対して活かせるかの見通しについても簡単に触れたい (cf. [7])。

参考文献

- [1] J. van Benthem. Modal frame classes revisited. *Fundamenta Informaticae*, 18:303–17, 1993.
- [2] M. de Rijke. The modal logic of inequality. *Journal of Symbolic Logic*, 57:56–84, 1992.
- [3] K. Fine. In so many possible worlds. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 13(4):516–520, 1972.
- [4] G. Gargov and V. Goranko. Modal logic with names. *Journal of Philosophical Logic*, 22:607–36, 1993.
- [5] R. I. Goldblatt and S. K. Thomason. Axiomatic classes in propositional modal logic. In J. N. Crossley, editor, *Algebra and Logic*, pages 163–73. Springer-Verlag, 1975.
- [6] V. Goranko. Modal definability in enriched languages. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 31:81–105, 1990.
- [7] A. Kurz and J. Rosický. The Goldblatt-Thomason theorem for coalgebras. In Till Mossakowski, Ugo Montanari, and Magne Haveraaen, editors, *CALCO 2007*, volume 4624 of *LNCS*, pages 342–355. Springer-Verlag, 2007.
- [8] K. Sano and M. Ma. Goldblatt-thomason-style theorems for graded modal language. In Lev Beklemishev, Valentin Goranko, and Valentin Shehtman, editors, *Advances in Modal Logic 2010*, pages 330–349. College Publications, 2010.
- [9] K. Sano and K. Sato. Semantical characterization for irreflexive and generalized modal languages. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 48(2):205–228, 2007.