

# ゲンツェンの証明が与える概念分析

高橋 優太

(Yuta Takahashi)

慶應義塾大学 文学研究科

G・ゲンツェンは、1936年の論文『自然数論の無矛盾性 (Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie)』[Gentzen 1936]の中で1階ペアノ算術( $PA$ )の無矛盾性を証明した(以下この証明を「36年証明」と呼ぶ)。36年証明は、ゲンツェンによる $PA$ の無矛盾性証明の中でも最も有名な1938年の証明[Gentzen 1938]と同じく $\epsilon_0$ までの超限帰納法を用いるものであるが、後者の証明とはかなり異なったものとなっている。

とはいえ、36年証明の哲学的動機付けとしては、1938年の証明と同様に、いわゆる「数学の基礎付け」が挙げられる。ヒルベルトに従い、ゲンツェンは、素朴集合論が矛盾を含むことを示す集合論的パラドクスは実無限概念の無制限な使用によって引き起こされると考えた。実無限とは、われわれによる構成・認識とは独立に、完結した無限として存在するような無限の総体のことである。そして、集合論的パラドクスの原因が実無限概念にあるということは、自然数から成る無限の総体を実無限的に扱うことに基づく理論である $PA$ の無矛盾性を脅かすとゲンツェンは考えた。そのためゲンツェンは、 $PA$ の無矛盾性を証明することで自然数の無限の総体を実無限として扱うことの正当化を与えようとした、というわけである。こうした「実無限概念の正当化による $PA$ の基礎付け」という36年証明の側面を、「基礎付け的側面」と呼ぶことにする。

しかし、発表者の考えるところでは、36年証明にはもう1つの哲学的動機付けがある。その動機とはすなわち、「 $PA$ が体現する算術的真理の概念について有限主義的な立場から分析を与える」というものである<sup>\*1</sup>。そしてこうした分析の内実は、「基礎付け的側面」とは異なるもう1つの36年証明の側面に着目することで明らかにできると考えられる。その側面とはすなわち、 $PA$ のすべての論理式に対し有限主義的な解釈を与える、という側面である。本発表の目的は、ゲンツェンが以上の動機付け・側面を36年証明に与えた理由を説明することを通して、36年証明の背景には「算術的真理の概念についての分析を与える」という興味深く重要な動機を見出せることを示すことである<sup>\*2</sup>。

<sup>\*1</sup> 本発表は、特に断らない限り、「有限主義」ということばを、[Gentzen 1936]で提示されたゲンツェンの立場を指すために用いており、そのことばでヒルベルトの立場を指しているわけではないことに注意されたい。

<sup>\*2</sup> この点に関して先行研究との関連を述べておこう。[von Plato 2009]は、全部で4つのバージョンがあるゲンツェンの無矛盾性証明の歴史的背景についての詳しい叙述と、各々の無矛盾性証明に対する解説を含んでいる。しかし、発表者が読む限り、「算術的真理の概念についての分析を与える」という動機付けを36年証明の中に見出すことができることを指摘してはいない。

[岡本 2007, pp.336-339,342-344]では、ヒルベルト・プログラム、および、それを修正しつつ継承したゲンツェ

本発表の内容を大まかに述べておくと、以下ようになる。ゲンツェンの言う「有限主義的解釈」とは、いわば、有限主義的な真理概念を用いて  $PA$  の論理式の真理条件を説明する、というものである。ゲンツェンは、「選列 (choice sequences)」という直観主義数学の概念と非常に類似した概念を用いて、算術的真理の概念を有限主義的に再構成した。そこでは、 $PA$  のある論理式  $A$  が真であるということは、 $A$  の正しさを確認するある種の実効的な手続きが構成できることとして説明される。このようにゲンツェンは、論理式の真理条件をある種の手続き (戦略) の構成でもって説明するという点で、Game-theoretical Semantics に例えられるアイデアでもって  $PA$  の論理式に対する「有限主義的解釈」を与えた。そして、まさにこうした解釈を与える過程で、算術的真理の概念について有限主義的な立場から分析が与えられたということを本発表は主張したい。

## 参考文献

- [Gentzen 1936] Gentzen, Gerhard, “Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie”, *Mathematische Annalen*, **112** (1936), 493-565.
- [Gentzen 1938] Gentzen, Gerhard, “Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie”, *Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften*, **4** (1938), 19-44.
- [岡本 2007] 岡本賢吾, 「数学基礎論の展開とその哲学」, 飯田隆編, 『哲学の歴史 11 論理・数学・言語』, 中央公論社 (2007), 所収.
- [von Plato 2009] von Plato, Jan, “Gentzen’s logic”, in D. Gabbay and J. Woods, (eds.), *Handbook of the History of Logic. Volume 5. Logic from Russell to Church*, pp. 667-721, Elsevier (2009).

---

ンの証明論,さらには現代の証明論研究が,数学の理論構造についての概念分析を与えるものであると論じられている。ゲンツェンの証明論,特に彼の無矛盾性証明が概念分析という役割を果たすと主張する点において本発表は [岡本 2007] と共通している。しかし,36年証明がもつ「有限主義的解釈」という側面に着目しそれを手がかりにしたという点において,そうした主張を裏付けるための本発表の議論(本要旨の以下の部分を参照)は [岡本 2007] のものとは異なっていると言える。