時空構造と相対論的場の量子論

清水哲男（Tetsuo Shimizu）

講演要旨: 相対論的時空構造(relativistic space-time structure)を 4 元数体(多元環(hyper-complex number)の 1 種)と拡張 4 元数体上の微分形式(differential form)によって表現し，それによって，相対論的量子場の理論(relativistic quantum field theory)を再構成する．なお，以下は，全て自然単位系 NUT(Natural UniT system，自然単位系， $c=\hbar=1$)においてこれを考察するものとする．

まず，Hamilton の 4 元数を，

$$i, j, k, i\cdot j=k, j\cdot k=i, k\cdot i=j, i^2=j^2=k^2=-1$$

によって定義し，さらにこれを 2×2 行列にまで拡張した 4 元数を，

$$\tilde{1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \tilde{i}=\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix}, \tilde{j}=\begin{pmatrix}0 & j\\ j & 0\end{pmatrix}, \tilde{k}=\begin{pmatrix}0 & k\\ k & 0\end{pmatrix}$$

によって定義する．Minkowski 多様体上の局所座標系 (t,x,y,z) 近傍の微分形式 ω を

$$\omega=\tilde{1}\cdot dt+\tilde{i}\cdot dx+\tilde{j}\cdot dy+\tilde{k}\cdot dz$$

によって定義すると， dt,dx,dy,dz を基底とし，$dt\circ dx=dx\circ dt, dt\circ dy=dy\circ dt$ ・・・等々によって定義される可換テンソル場においては，

$$\left[\tilde{1},\tilde{i}\right]_{+}=\tilde{1}\cdot\tilde{i}+\tilde{i}\cdot\tilde{1}=0, \left[\tilde{i},\tilde{j}\right]_{+}=0$$

等々が「うまく」成立するから

$$\omega^2=dt^2-dx^2-dy^2-dz^2$$

であり，これはローレンツ変換(Lorentz transformation)に対して不変な計量(ローレンツ計量，Lorentz invariant metric)そのものである．したがって，この微分形式は Minkowski 多様体の局所座標系の<よい>(忠実な faithful)表現であり，結局，

$$\omega=\alpha\cdot d\tau$$

が成立しなければならない．ここで，α は 4 元数体上の 2×2 行列で，$\alpha^2=1$ でなければならない．また，τ はローレンツ変換に対して不変なスカラー量であり，ローレンツ計量が 0(光速運動体)の場合は通常の「距離」そのものをとればよい．結局，

$$\frac{d}{d\tau}\cdot d\tau-d\tau\cdot\frac{d}{d\tau}=1$$

なる微分演算子としての交換関係が成立する．これを利用して，

$$p=-i\cdot\frac{d}{d\tau}, q=d\tau$$

と置けば，

$$[q, p] = i$$

なる正準交換関係が成立する．つまり q, p は，ローレンツ変換に対して不変な計量をもち，相対論的量子力学的な「位置」演算子と「運動量」演算子に対応する，と考えることができる．ここでさらに，

$$b^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(p + i \cdot q) = -i \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{d}{d\tau} - d\tau), b = \frac{1}{\sqrt{2}}(p - i \cdot q) = -i \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{d}{d\tau} + d\tau)$$

と置けば，

$$[b\ , b^*] = 1, [b^* b, b] = -b, [b^* b, b^*] = b^*$$

等々であるから，b, b^* のそれぞれを，この「相対論的量子力学システム」における「消滅演算子」と「生成演算子」に対応させることができる．これは Dirac:“The Principles of Quantum Mechanics”, 4-th edition, pp.136-139，§34，”harmonic oscillator”に述べられた量子化の方法を「逆に」行って相対論に拡張したものである．結論として，

$$\tilde{n} = b^* b = \frac{1}{2}(p^2 + q^2 + 1) = -\frac{1}{2}(-\left(\frac{d}{d\tau}\right)^2 + d\tau^2 + 1)$$

は，量子数を与えるローレンツ変換不変な number operator であると同時に「非」相対論的量子力学における Hamiltonian を，ごく自然に相対論的なものにまで一般化したものと考えることができる．ここで，物理的真空を「消滅演算子」によって「真の虚無」になってしまうような状態として考え，

$$b | 0 >= 0$$

によって定義する．この「物理的真空に対応する量子状態」の解は「形式的に」，

$$| 0 >= C \cdot \exp(-d\tau^2 / 2)$$

として簡単に得ることができる．この「相対論的量子力学システム」においては，物理的真空は単なる静止状態も虚無でも<全く・ない>．物理的真空とは，微小な 1 次元の「変位(difference)」が，相対論的に不変な運動態である調和振動子の「存在の種子」として「実在する」状態であると考えることができよう．また，

$$\tilde{n} \cdot (b^*)^n | 0 >= n (b^*)^n | 0 >$$

であるから，$(b^*)^n | 0 >$ は n 個の相対論的(ローレンツ変換不変な)「変位」振動「量子」が存在する固有値状態 $| n >$ であり，その固有値としてのローレンツ変換不変な総運動量の自乗ともいうべき物理量は n である．この量子化手続きによってえられた「量子」とは，周波数が「1」の，いわば「プランク周波数(の自乗)」ともいうべき物理量をもつ「時空量子」であると考えられる．このように「形式的に」相対論的量子力学を，(拡張)4 元数体上の微分形式によって構築することができた．講演は，この「相対論的量子力学システム」の自然学的(物理的)「解釈」を中心に述べる予定である．