量子力学の定式化に関する一提案

宮田　直幸 (Naoyuki Miyata)
富山県工業技術センター

これまで、量子力学の統計的な振る舞いを決定論的に理解したいと考える科学者は少なからずおり、隠れた変数によってそれを記述する事が検討されたが、Bell の不等式の破れが実験で実証された事によってその可能性は否定された、と考えられている。しかしながら、それは局所的な隠れた変数理論についてであって、非局所的な隠れた変数理論であれば、問題がない。そのような観点から、一つの定式化を提案する。

その定式化は以下で述べるように、Hamiltonian に反エルミート部分を加える事を必要とし、各成分で書けば、

$$i\hbar\dot{c}_i = \sum_j H_{i,j}c_j + i\sum_j(\sum_{k,l,m,n}\bar{c}_k c_l \sum_p(\bar{c}_m c_p H_{n,p} + \bar{c}_p c_n H_{p,m}) \times \sum_{\sigma\in S_3} sgn(\sigma) f_{\sigma((i,j)),\sigma((k,l)),\sigma((m,n))})c_j \tag{1}$$

のようなものであると考えている。ここで、σ は、$(i,j),(k,l),(m,n)$ の間の置換であり、$sgn(\sigma)$ はその符号である。また、エルミート性のため、$\bar{f}_{(j,i),(l,k),(n,m)} = f_{(i,j),(k,l),(m,n)}$ の条件を課す。この定式化の相対論との整合性については、別の機会に考える。これは、外積によってノルムと全エネルギーを保存する方向を得ておいて、Hodge 作用素で元の 1 形式に戻す事によって得られたものである。上式は、$f_{(i,j),(k,l),(m,n)}$ を動かす事で、そのような全ての方向を含み、そのような条件を満たす一般的な表現となっている。ノルムが保存されるためには、反エルミート部分はあってはいけないと思われるかもしれないが、それは線形の場合であって、非線形の場合は、そうとは限らないし、エルミート部分、反エルミート部分の区別があいまいになる事に注意されたい。この定式化の特徴としては、ノルムと全エネルギー以外に、Hamiltonian と可換な物理量は、初期時刻において状態がその物理量の固有状態であれば、保存する事、ゲージ不変性のように、位相の回転に対して、$f_{(i,j),(k,l),(m,n)}$ の位相を回転させる事で、不変性を回復する事ができる事、反エルミート部分の存在により、時間反転対称性が破れている事、等が挙げられる。

今、ある粒子（または反粒子）のあるサイト（格子点や固体内）の一粒子固有状態を考えると、低エネルギーの軌道では、Hamiltonian の一部分をその固有状態の生成消滅演算子でよく近似し、高エネルギーの軌道は、他のサイトの状態に対応しているものと考えられる（強束縛近似の生成消滅演算子ではなく、そのサイトが孤立している時のそれである事に注意されたい）。そこで低エネルギーの軌道の添え字を（EPR にも対応するため、多粒子の場合も含み、まとめて）大文字で表す事にすると、Hamiltonian はその大文字の添え字について、ブロック対角化されているものと見なせる。そうすると、反エルミート部分を $i\Gamma$ と表

す事にして、$c_{I,i}=|c_{I,i}|e^{i\alpha_{I,i}}$ の時間変化は、

$$\frac{d}{dt}\alpha_{I,i}=\frac{d}{dt}\frac{1}{i}\ln\frac{c_{I,i}}{|c_{I,i}|}=\frac{1}{\hbar}\sum_{J,j}\frac{|c_{J,j}|}{|c_{I,i}|}\sqrt{|H_{(I,i),(J,j)}|^2+|\Gamma_{(I,i),(J,j)}|^2}\sin(\alpha_{I,i}-\alpha_{J,j}+\beta_{I,i;J,j}), \tag{2}$$

$$\frac{d}{dt}|c_{I,i}|^2=\frac{2}{\hbar}\sum_{J,j}|c_{I,i}|\sqrt{|H_{(I,i),(J,j)}|^2+|\Gamma_{(I,i),(J,j)}|^2}\sin(\alpha_{I,i}-\alpha_{J,j}+\beta_{I,i;J,j}-\frac{\pi}{2})|c_{J,j}| \tag{3}$$

と表される。ここで、$|c_I|^2\equiv\sum_i|c_{I,i}|^2$ を状態 I の確率振幅と見、その内部の自由度を隠れた変数と見る事で、それらが $|c_I|^2=1,0$ と変化する事を波動関数の収縮と見たいのであるが、$\Gamma=0$ とすると、Hamiltonian がブロック対角化されている事より、$\frac{d}{dt}|c_I|^2=0$ となり、説明できない。つまり、波動関数の収縮の説明には、反エルミート部分が必須であると思われる。式 (2) は、重みの変化する蔵本モデルと見る事ができ、Hamiltonian の対角成分で表される周波数で位相が回転しつつ、周波数が近く、振幅が大きい成分に同期する事を表しており、式 (3) は、同期した成分の存在によって、振幅がより速く成長する事を表していると解釈できる。特に、Γ は十分小さいとすると、式 (2) では、同じ I の仲間だけで同期が起こり、式 (3) では、Γ の存在によって初めて $\frac{d}{dt}|c_I|^2\neq0$ となるし、$\sum_{i,j}\bar{c}_{I,i}\Gamma_{(I,i),(I,j)}c_{I,j}+\sum_{J\neq I,i,j}\bar{c}_{I,i}\Gamma_{(I,i),(J,j)}c_{J,j}$ において、第 2 項は位相の打ち消しあいで平均的に無視できると思うと、第 1 項は $|c_I|^2$ に比例するので、固有状態の所で、実際に停留する事を言える。発見法的な議論に過ぎないが、このようにして、波動関数の収縮の説明が可能であると考えている。

Born の確率規則については、I に収縮する確率 P_I が、隠れた変数を変化させたアンサンブルの収縮先の割合として、$|c_I|$ たちだけの関数として Taylor 展開できる事を仮定すれば、説明できる。P_I の和が 1 であり、$|c_I|$ が球面上にある事から、P_I の和は回転に対して不変である事、特に $|c_I|^2$ の形でしか現れない事を使うと、$P_I=|c_I|^2$ の形しか取りえない事が比較的簡単な議論からわかる。

ここでの議論では、Hamiltonian を対角化する基底で見た時には、収縮のようには見えず、対角化しない基底にずらした時に初めて収縮のように見えるという事になるが、各ブロック内での対角成分のばらつきが最も小さくなるものが、我々の見る収縮に対応すると考えている。数値計算で収縮の様子を具体的に示す事については、発表までに間に合えば、報告する。

誤解を恐れずあえて言うと、$f_{(i,j),(k,l),(m,n)}$ の部分に、物理法則とは独立に動かせる部分が存在すると、物理法則には抵触せずにいながら、どの固有状態に収縮するかに影響を与える事ができ、そのような形で生物の自由意志が入っているのかもしれない、と考えている。

本発表では、量子力学の不可解な部分が、この定式化でどのように納得し得るかについて、考察する。

なお、この研究は、業務時間外に行われたものであり、所属機関の業務とは一切関係がない。