非可述性の分析としての証明論

秋吉 亮太 (Ryota Akiyoshi)
慶應義塾大学文学研究科

証明論はヒルベルトによって創始された、(主に数学の) 証明を探求対象とする数学ないしは論理学の一分野であり、当初の目的は安全・確実とされる有限の立場の数学において無限的な要素を含む理論 (例えば自然数論、実数論) の無矛盾性を証明することであった。

1931 年のゲーデルの第二不完全性定理によってこの試みは (当初の形では) 実行不可能であるとの烙印を押されたが、有限の立場を適宜拡張することにより、1936 年にゲンツェンによって自然数論の無矛盾性が証明された。ゲンツェンは、自然数論の無矛盾性をカット消去定理の手法により証明したが、カット消去手続きの停止性を示すために初めのε数までの順序数を導入したことは特筆に値する。なぜならば、最初のε数までの順序数 (より正確にはそこまでの、量化子を含まない論理式に関する超限帰納法) こそが、ゲンツェンが有限の立場を拡張した点であったからである。さらにゲンツェンは初めのε数がこのような順序数の中で最小のものであることを示した。これらの仕事により形式的体系の強さを順序数によってはかるという現代証明論が誕生し、その手法から今では「順序解析」と言われている。ちなみに、最初のε数は自然数論のカットなしの証明図の大きさの上限と見ることができる。

証明論は 1950 年代に大きな転換期を迎える。竹内外史によりゲンツェンの式計算が高階にまで拡張され、そのような体系に関するカット消去定理が予想として提出された (「竹内予想」、1953 年)。高階論理は包括原理という形で集合論的な原理を含む、非可述的な体系である。1950 年代後半に竹内は基本予想の部分解をたびたび提出したが、とりわけ 1958 年に現在でいう Π^1_1-CA の無矛盾性を証明した。この際、上で述べたようにゲンツェンの証明と同様カット消去プロセスの停止性証明がポイントとなるが、そのために ordinal diagrams と呼ばれる独特の順序数体系が竹内によって導入された。

ordinal diagrams はカット消去プロセスから抽象されて作られたものであるため直観的理解がしづらいものの、竹内の手法はその後、八杉満利子との共同研究により Δ^1_2-CA にまで拡張された。尚、以下に述べるドイツのシュッテ学派の研究によりわかったことであるが、竹内の順序数には現在用いられている「崩壊関数(collapsing function)」のアイディアが既に含まれているとみなすことができる。

証明論にとっての次の大きな転換期は 1970 年代に主にドイツのシュッテ学派を中心に起った。特に、ポーラーズとブフホルツは再帰的定義(inductive definition)の理論に関する順序解析を行った（尚、おおざっぱにいって再帰的定義の理論はΠ^1_1 と対応関係をもつ)。この時に上で言及した崩壊関数が明示的に導入された。崩壊関数とは、（非可算濃度を持つ）大きな順序数を可算順序数まで「つぶす」関数のことであり、この手法によって理論の強さが計られるようになった。一般的には、ある体系の証明論的順序数とは（典型的には算術的な論理式に関する）カットなしの証明図の「大きさ」の上限であり、従って、適当な「大きな」順序数を崩壊関数によってつぶすことによってこのようなカットなしの証明図の大きさが計られる。つまり、崩壊関数とはカット除去プロセスをある意味「描写」するものである。1970 年代の証明論においてはε_0 番目までの正則な順序数をつぶす崩壊関数が用いられた。

その後証明論は、1980 年代以降分析対象をある種の集合論へと移した。イェーガーの仕事をきっかけとして、証明論は KP（クリプキ＝プラテック）集合論の分析へと移っていった。特に特筆すべきなのはポーラーズ、イェーガーによる KPi 集合論の順序解析であり、初めて証明論に最初の弱到達不能基数という巨大基数が導入された。その後、ラティエンと新井によって、弱マーロ基数、弱コンパクト基数等をもちいた順序数体系が考案されて非常に強い体系の順序解析が達成された。以上が現在までに至る証明論（順序解析）のごく大雑把な歴史であるが、ここで特徴的なのは、実は「本当の」正則基数や「本当の」巨大基数ではなくて、帰納的な対応物が用いられているということである。これは順序解析が扱う対象、手法が全て「帰納的」であるという理由による。

ここで一つの問を考えてみたい。どうして証明論はこのような発展をたどったのであろうか。つまり、以前は包括原理の階層を下から登っていたのが、なぜ再帰的定義の理論や KP 集合論の証明論へと分析の対象を移していったのであろうか。端的にいってしまえば、再帰的理論や KP 集合論では扱う対象がある意味「構成的」であるために、順序解析（直接的にはカット消去定理）がやりやすいためである。しかしながら、近年、順序解析の手法が技術的・概念的に非常に複雑になったため証明論をもう一度見直す、ないしは理解し直すという研究もいくつか出ている。以上のような事情をふまえて本発表では、最初に簡単に証明論の歴史を振り返った後、順序数体系を簡単に解説する。特に、「崩壊関数」の定義を簡単にみる。そして、ある種の「構成的な操作」による非可述性の分析として証明論を見直せることを示唆する。最後に、時間が許せば、発表者自身の研究に関連づけることを試みる。