

T 0 9 0 6 命題と不完全性定理

長田 博泰
札幌学院大学名誉教授

「古典現象」という新しい概念を導入することによって自然の累層性に対応する自然科学の多層的構造を示す。これによって我々の自然認識の可能性およびその認識方法の発展に資することを目的とする。以下、まず我々の五感によって知覚され、あるいは各種物理的機器によって測定される様々な物理現象はすべて古典物理学の言葉で記述されるという事実を端的に表すために「古典現象」という概念を導入する。次いで「古典現象」として知覚し表現された物理現象の中に古典物理学では説明できない現象があること、すなわち量子的現象のあることを指摘し、この事態を「T 0 9 0 6 命題」として捉えるとともに、この命題から古典現象が多層的構造を有することを示す。最後に、この自然科学の多層的構造とゲーデルの不完全性定理との対比を試みる。

我々が自然を観察・観測しあるいは物理現象を対象とする実験によって対象に関する情報を得る場合、最終的には我々の生来有する感覚器官すなわち五感を介している。五感が受け取る自然という外界からの情報は常にマクロな情報すなわち古典論的信息である。外界からの情報がすべてマクロな情報であるとすれば、このマクロな情報からどのような条件に支えられてミクロの法則すなわち量子力学を手にすることができたのであろうか。

このような問題を扱うためにここでは物理現象に関する古典物理学（Newton 力学 + Maxwell の電磁場理論）の用語を古典語と呼ぶことにし、物理用語として古典語のみを用いて表現された物理現象を古典物理現象あるいは単に古典現象と呼ぶ。

しかしながら、日常意識もせずやり過ごしている物理現象の中には古典現象として記述できるにもかかわらず、古典物理学では再現できない現象がある。だれでも「夜空の星が見える」ことあるいは高山や海岸で日焼けの起こることを知っている。しかしこれらの現象は古典語で表現されながら古典物理学では説明できず、量子力学によって始めて再現される現象である。このような物理現象を量子的古典現象と呼ぶことにする。ここで注意すべきは古典論から導くことができない古典現象のすべてが量子的古典現象とは限らないことである。もしすべての非古典的古典現象がすべて量子的古典現象だとすれば、それは量子力学を究極理論とみなすことになる。自己の究極性という自己言及命題を自己の体系内で証明するというジレンマから逃れることはできなくなる。一方、古典力学と量子力学は非共立（非両立）である。量子力学では複数の量子状態を波のように重ね合わせて量子状態になる。一般に量子状態はある確率で物理的内容を共有している。古典力学においては状態を定めるとは物理量がとる値を必要なだけ与えることである。その意味で古典力学と量子力学は非両立である。かくしてつぎのT 0 9 0 6 命題に到達する：

「古典現象の多くは古典力学で再現することができるが、古典語で表現されているにもかかわらず古典力学で表現できない古典現象が存在する。それらの中には古典力学

と非共立な量子力学によって再現することができる古典現象が存在する。量子力学が究極理論とみなすことはできない以上古典現象は多層的構造をもつ。」

上記の命題はゲーデルの不完全性定理の内容と奇妙なほどよく対比させることができることを示す。よく知られているように、ゲーデルの第一不完全性定理とは足し算、掛け算などが行える程度の自然数論を含む形式体系が無矛盾であれば、その形式体系の公理と推論規則をどのように組み合わせても、肯定も否定も証明できない命題Gを構成することができるというものである。第二不完全性定理は無矛盾な上述の形式体系で自己の無矛盾性を体系内部で使うことが許された公理と推論規則を使う限り、証明することができないことを示す。

不完全性定理とT0906命題をつぎの点から対比しよう。 a) 基礎となる公理ないしは基準系, b) 対象世界に固有な基準公理, c) 結果として導出される内容, d) 導出内容に対する対応処理の4点である。対比結果を表として示す。

表 ゲーデルの不完全性定理とT0906命題の対比

		第一不完全性定理	T0906命題
対比内容	a)	初等算術を含む無矛盾な公理と推論規則からなる形式体系から出発する限り	古典語表現される現象の中に
	b)	肯定及び否定のいずれも体系内で証明できない命題Gが存在する。	古典力学では再現できない物理現象があつて
	c)	Gの否定を付加した新体系は無矛盾であるが	量子力学によって始めて再現できるが
	d)	その新体系は自然数について真である命題全体とは両立しない。	古典力学と量子力学とは両立しない。
		第二不完全性定理	T0906命題
対比内容	a)	一階述語論理内で展開される	基準命題内で展開される
	b)	無矛盾な算術形式体系では	古典論の基準命題では
	c)	その無矛盾性を体系内で証明することは不可能である。	「夜空の星が見える」現象を再現することは不可能である。
	d)	しかし算術形式体系を越えた超限帰納法によって無矛盾性を証明することは可能である。	しかし古典論の基準命題と非両立な量子力学で再現可能である。

全体を見て両者の対比が余りによくできていることに驚く。この綺麗な対比は全自然現象を古典現象として捉え、その上に各力学の再現性を導入したことによってもたらされたのではないかと思われる。しかしこれが何を意味するのかについては今後の課題である。

引用文献

田中, 中戸川, 長田 (2010): T0906 命題と不完全性定理, 平成 22年度科学研究費補助金基盤研究 (C)「量子揺動の論理 - 圏論による記述 : 時空の期限からの考察」報告集

Tanaka, Nakatogawa, Nagata (2011): A proposition called T0906 and Gödel's Incompleteness Theorem (draft). <http://logic.let.hokudai.ac.jp/~koji/kisoron2011ws/t0906.pdf>