

量子論の代数的定式化とその意味

小嶋 泉 (Izumi Ojima)

京都大学数理解析研究所 (RIMS, Kyoto University)

1) 「代数的定式化」 vs. 標準的定式化

量子力学の標準的定式化は、「状態ベクトル」のなす Hilbert 空間を導入するところから始まり、複数の状態ベクトルの「重ね合わせ」と呼ばれる線型結合の形で与えられた状態ベクトルが「現実的に」何を意味するか？を了解することがその理解の要だと説明される。それを理解する過程で、干渉効果や粒子性と波動性、不確定関係、「波束の収縮」等々、巨視的世界で我々が身につけて来た多くの「常識」とかけ離れた「量子現象」固有の「量子性」が論じられ、いわゆる「量子力学の哲学的解釈」を巡る大概の議論も、煎じ詰めると殆どこの周辺のテーマを議論することになっている。

2) 「標準的」定式化 = 「初めに Hilbert 空間ありき」の一面性と有限自由度系の特殊性・理論的欠陥：「量子古典対応」の「棚上げ」によるマイクロとマクロの切断

そういう「量子性」を深く理解することは、それはそれで大事なことに違いない。このような量子世界のナゾは確かに、どの量子力学の教科書を開いても書かれており、それは実験的にも検証済みで、疑う余地のないものだと説明される。しかし、たとえば「実験的に検証済み」であったとしても、有限個の量を有限回数、有限精度で測定して得られた実験結果を理論的に解釈するとき、どうして「標準的定式化」に従った形でだけ、それを理解しなければならないのか？そもそも我々人間は一体どうやって、そんなにもマクロ世界の常識とかけ離れたマイクロ世界の秘密を、知り得たのだろうか？その珍奇なマイクロ世界は、一体我々のマクロ世界とどうつながり、どう関わっているのだろうか？

いまどきこんな質問をしても、十中八九、そんなことはもう「確立済み」で疑う余地のないこと、我々はそんな初歩的なことではなく、もっと先の深遠なナゾの解明に忙しいのだ、と一蹴されておしまい、ということに違いない。そこで、「量子力学の哲学的解釈」を巡る議論も、勢い「専門家」の書いた「解説書」を受け容れ、その延長で「専門家」の機嫌を損ねない範囲で考える、ということになりがちではないか？

しかし、ちょっと待って欲しい。翻って考えれば、そういう確立されてしまった量子力学の理論も、元はといえば、20世紀冒頭提出された Planck 量子仮説を巡って、1920年代 Heisenberg や Schrödinger, Dirac, Born, von Neumann などという錚々たる面々が、古典物理学しか知られていなかった中から「素手で」作り上げたものではなかったか？彼らはそのとき、何を手掛かりに、今我々が知るような量子力学の体系を作り上げたのだろうか？--- 実はそのカギは「量子古典対応」という発見法的理念にあり、それなしに、未知のマイクロ量子世界を既知のマクロ古典世界につなぐことはできなかったはずである。

ところが全く不思議なことに、その重要な(はずの)「量子古典対応」が、その後の量子

力学の歴史+現在の表舞台に顔を出すことは滅多にない。どのようにして既知のマクロ古典世界と未知のミクロ量子系とをつなぐかという議論はすっ飛ばして、突然、「初めに Hilbert 空間ありき」となって、この予稿冒頭の話につながるのである！！

3) 「量子古典対応」の数学的方法論化=「ミクロ・マクロ双対性」

どこかで何かが変わるではないか??... そう、その通り！マクロ古典=「ミクロ量子の無限集積」という「量子古典対応」の基本理念をきちんと書き下そうとすれば、「量子力学」=有限自由度系の量子論の理論体系に取り込み兼ねて外に放り出してしまった「無限自由度量子系」という「隠し子」を表に出さないわけにはいかななくなるのである！

これが、「量子力学の標準的定式化」に隠された「秘密」の正体なのだ！

「無限自由度量子系」がどんな風に扱われるべきかを知っている現代の我々が、いつまでも量子力学誕生に隠された「秘密」に囚われる必要は、もはやない！それを明るみに出して、「量子古典対応」のエッセンスを方法論の形で縦横に活用すれば、「ミクロ・マクロ双対性」という考え方になる。

4) 「ミクロ・マクロ双対性」と量子論の「代数的定式化」

そういう状況で決定的に重要な役割を演ずるのは、量子論の Born 解釈を振り返っても分かるように、A という原因があったとき B という結果が一義的に決まるのではなく、「多様な実現形態」があり得る、という「因と縁」の関係性である。これを数学的に体系化すれば、抽象的代数構造とその多様な表現との間の「双対性」(duality) を扱う表現論的なものの考え方になる。「代数的量子(場理)論」のエッセンスは、この表現論的双対性を自由に活用するための不可欠の前提としての syntax を扱うところにある。

ということは、「代数的定式化」だけで話が終わるのではなく、当然のことに、「表現論」= semantics のレベルが想定され、syntax と semantics との「双対性」をどのように運用するかがもっとも重要な理論の焦点になる。これを圏論的随伴構造(adjunction) や 5W1H (= when & where/ who, what/ how & why) との関係も睨んで、categorical framework として考えたものが、動力学/ 物理量の代数/ 状態 & 表現/ Spec = 分類空間 (コ時空) から成る「4項図式」である。

参考文献：

I. Ojima, A unified scheme for generalized sectors based on selection criteria, *Open Systems and Information Dynamics*, 10 (2003), 235-279 (math-ph/0303009); I. Ojima, Micro-macro duality in quantum physics, pp.143-161 in "Stochastic Analysis: Classical and Quantum --Perspectives of White Noise Theory" ed. by T. Hida, World Scientific (2005) (math-ph/0502038); 小嶋 泉, 代数的量子論とミクロ・マクロ双対性, 『数理科学』 2007年7月号 (No. 457), pp.18-23; 小嶋 泉, 「量子古典対応」と「凝縮状態」: pp.11-52 in 『数理物理への誘い 7』(遊星社, 2010).