

論理と代数幾何における双対性

丸山 善宏

京都大学文学研究科

maruyama@i.h.kyoto-u.ac.jp

<http://researchmap.jp/yumaruyama/>

表現と実体の双対性 実体とその表現、反対に見れば、表現とそこから導かれる実体概念という二項対立は多様な学問領域に存在している（表現と実体のいずれが先行するかについては様々な立場が考えられる）。これは、存在論と認識論の間の対立と言っても良いだろう。そして、私の考えでは、圏論的双対性の多くは、何らかの表現概念と何らかの実体概念の間に現れる（以下、双対性は圏論的双対性を意味する）。本講演の目的は、数理論理学における双対性と代数幾何学における双対性を、表現と実体の間の双対性という観点から捉え直し、両者の緊密な相互関係を数学的に厳密な仕方で明らかにすることである。またその関係性に立脚して、論理学的事実の代数幾何学的意味や、代数幾何学的事実の論理学の意味について考察する。

本講演では特に数理論理学と代数幾何学に焦点を当てるが、表現と実体の間の双対性という観点自体は、計算機科学（プログラムの観察可能な性質と表示的意味の間の双対性）や量子物理学（可観測量と状態の間の双対性）など、幅広い学問領域において意味をなす。また、こういった考えは、点と領域の双対性（例えば [4] 参照）を通じて、点概念を領域概念の派生物と見なすホワイトヘッドやフッサールらのメレオロジーや、ヴィトゲンシュタインの “What makes it apparent that space is not a collection of points, but the realization of a law?” (*Philosophical Remarks*, p.216) というノートに見られるような、空間概念に関する哲学的考察とも密接に関連している。

代数幾何学における双対性 代数幾何学（例えば [2] 参照）は、素朴に言えば、多項式系の零点として記述される図形の幾何学である。この意味で代数幾何学は、多項式系という表現（形式）と空間内の図形という実体の双方を問題としている。古典的な代数幾何学は、図形としての零点集合、つまり実体に重点を置いていたが、抽象代数や圏論を用いて近代化された代数幾何学では、重点は多かれ少なかれ表現へと移っていった。その近代化の過程で、「多項式系」は任意の可換環、「点」は任意の素イデアルのレベルまで抽象化され、零点集合としての「図形」にあたるスキームは、可換環の層という、本来「表現」の側にあるはずの、環に関する情報を明示的にもっている、いわば表現と実体のアマルガムのようなものとなったのである（しかし、表現と実体が双対的に同値と考えるなら、この方法は自然にも見える）。

代数幾何学における双対性で最も基本的なものは、ヒルベルトの零点定理に基づくものだろう。零点定理は、代数閉体上の幾何を考えたととき、根基イデアル全体とアフライン多様体全体の間に変換順序同型があることを意味する。ここで、包含写像以外の射の情報も考慮する事により、最終的に、代数閉体上の有限生成被約代数の圏とアフライン多様体の圏の間の反変圏同値を得ることができる。これを本講演ではヒルベルト双対性と呼ぶ。後に重要になってくるのは、代数幾何学は通常有限次元の対象のみを扱う（不定元の数には有限の上限がある）という点である。無限次元の代数幾何を考えることもできるが、そのとき零点定理はもはや一般には成立しないという

事実がある（従ってヒルベルト双対性も一般には成立しない。[1] 参照）。

数理論理学における双対性 数理論理学は、構文論（理論）と意味論（モデル）という原理的区別をその基礎としている。理論は表現であり、モデルは実体である。数理論理学においては、当初から表現に少なからぬ重点が置かれてきた。形式体系という表現概念無しには、数理論理学という学問の確立はほとんど不可能であったろう。なお、代数幾何学の近代化と数理論理学の確立は、ともに数学の近代化における重要な出来事であり、この段落と上の段落で述べたことは、一般に数学の近代化において「実体」から「表現」への重点の移行が様々な点でなされていった、という見方を支持するものであると考えられる。

数理論理学における双対性で最も基本的なものは、（古典命題論理の）完全性定理に基づくものだろう。完全性定理は、実は双対性であり、（古典命題論理上の）理論全体とモデルの空間全体の間に変換順序同型があることを述べる。ここで、包含写像以外の射の情報も考慮し、モデルの空間に論理式から生成される位相が入ることに注意すると、最終的に、理論の圏とモデルの空間の圏の間の反変圏同値を得ることができる。別の言葉で言えば、これは、ブール代数の圏と零次元コンパクトハウスドルフ空間の圏の間の反変圏同値、すなわちストーン双対性である（[3] 参照）。後に重要になってくるのは、数理論理学は通常無限次元の対象を許す（つまり命題変数の数は通常可算無限個以上である）という点である。これは、ストーン双対性の例で言えば、有限生成ではないブール代数も考慮されているということの意味する。

零点定理と完全性、或はヒルベルト双対性とストーン双対性 ヒルベルト双対性（或は零点定理）とストーン双対性（或は完全性定理）は、ともに表現と実体の双対性であるという意味で同じものであるが、両者の類似性は単にそれだけにとどまるものではない。よく知られているように、古典命題論理の論理式は標数 2 の素体上の多項式と実質的に同じものである。従って、標数 2 の素体上の代数幾何と古典命題論理の関連性が示唆される。しかし、顕著な相違点は、論理学が無限次元を当然のように扱うのに対して、代数幾何学は通常有限次元のレベルにとどまるということである。これは、論理学が無限次元の代数幾何学に応用できることを示唆する。

我々はまず、標数 2 の素体の代数閉包に対する零点定理から、古典論理の完全性が従うことを示す（代数閉包を考えると、ヒルベルトの零点定理は有限次元のためこれは論理のレベルでの完全性であり理論のレベルでのものではないことに注意）。次に、逆向きに議論を適用することによって、理論のレベルでの古典論理の完全性や無限論理の完全性から、ある種の無限次元の代数幾何学における零点定理の類似物を導くことができることを示す（但し、これらの論理に縮約規則があるためイデアルは冪等と仮定される）。さらに、ヒルベルト双対性はある種の有限次元のストーン双対性に対応し、ストーン双対性はある種の無限次元のヒルベルト双対性に対応することを示す。最後に、こういった関連性に立脚して、論理学におけるコンパクト性定理が無限次元の代数幾何学における非自明な事実を与えるといった仕方で、論理学が無限次元の代数幾何学に応用できることを示す。また逆に、代数幾何学の論理的解釈についても考察する。

参考文献

- [1] C. Birkar, *Topics in Modern Algebraic Geometry*, PhD Thesis, The University of Nottingham, 2004.
- [2] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer, 1977.
- [3] P. Johnstone, *Stone Spaces*, CUP, 1986.
- [4] Y. Maruyama, Fundamental results for pointfree convex geometry, *Annals of Pure and Applied Logic* 161 (2010) 1486-1501.