可証性述語の述語様相論理

倉橋　太志 (Taishi Kurahashi)

神戸大学システム情報学研究科

形式的体系の証明可能性は様相の一種であると考えられる．ここでは特に形式的体系の証明可能性を形式的算術内で表現する論理式，つまり可能性述語の様相演算子としての挙動に注目する．可証性述語に関する性質を公理や推論規則としてもつ命題様相論理体系 GL に関する研究は盛んに行われているが，特に 1971 年，Segerberg は GL のクリプキ完全性定理を証明し [4]，1976 年に Solovay は GL の算術的解釈に関する完全性定理を証明した [5]．一方，GL を述語様相論理に自然に拡張した体系 QGL に対してはこれらの完全性が成り立たないことが 1984 年に Montagna によって証明されている [3].

Th(QGL) を QGL の定理全体の集合，Fr(QGL) を任意の推移的かつ逆整礎的なクリプキフレームで妥当な述語様相論理式全体の集合とする．T をペアノ算術 PA の部分理論 $\mathsf{I\Sigma_1}$ の再帰的拡大理論とする．述語様相論理式の T-解釈とは，述語様相論理式全体の集合から T の言語の論理式全体の集合への写像であり，様相演算子 $\Box$ を T の可証性述語 $\mathrm{Pr}_T(x)$ に写すもののことをいう．述語様相論理式が任意の T-解釈のもとで T で証明可能であるとき，その論理式は T-妥当であるという．PL(T) を T-妥当な述語様相論理式全体の集合として定める．このとき $\mathsf{Th(QGL)} \subseteq \mathsf{Fr(QGL)} \cap \mathsf{PL}(T)$ が成り立つ．[3] における Montagna の定理はこれらの集合を用いて $\mathsf{Th(QGL)} \subsetneq \mathsf{Fr(QGL)}$，$\mathsf{PL(PA)} \not\subseteq \mathsf{Fr(QGL)}$, $\mathsf{Th(QGL)} \subsetneq \mathsf{PL(PA)}$ と表すことができる.

また Montagna は [3] において $\mathsf{PL}(T) \neq \mathsf{PL(PA)}$ となる PA の再帰的拡大理論 T の存在を示し，更に，Σ_1-健全な PA の再帰的拡大理論 T に対する PL(T) すべての共通部分は Th(QGL) と一致するという予想をたてた．しかし，1985 年 Vardanyan によって PL(PA) が Π_2-完全であることが証明され ([6])，その手法を用いて Montagna の予想が成立しないことが示される．ただ，さまざまな理論 T に対する PL(T) を考えることによって可証性述語の様相演算子としての挙動を特徴付けるという Montagna の予想の基本構造は重要であり，その点をもって Th(QGL)，Fr(QGL)，PL(T) の間の関係が完全に理解されているとはいえない.

こうした背景のもとで以下を証明した．(1) $\mathsf{I\Sigma_1}$ の任意の再帰的拡大 $\mathcal{L}_A$-理論 T に対して $\mathsf{PL}(T) \not\subseteq \mathsf{Fr(QGL)}$; (2) $\mathsf{I\Sigma_1}$ の任意の Σ_1-健全な再帰的拡大理論 T に対して $\mathsf{Fr(QGL)} \not\subseteq \mathsf{PL}(T)$; (3) $\mathsf{I\Sigma_2}$ の任意の再帰的拡大 $\mathcal{L}_A$-理論 T に対して $\mathsf{Th(QGL)} \subsetneq \mathsf{Fr(QGL)} \cap \mathsf{PL}(T)$; (4) 任意の異なる 0 でない自然数 m, n に対して $\mathsf{PL(I\Sigma_m)} \neq \mathsf{PL(I\Sigma_n)}$.

参考文献

[1] Artemov, Sergei; Dzhaparidze, Giorgie, *Finite Kripke models and predicate logics of provability*. J. Symbolic Logic 55 (1990), no. 3, 1090–1098.

[2] Kurahashi, Taishi, *Semantical analysis of predicate modal logic of provability*, Master's Thesis, Kobe University, 2011.

[3] Montagna, Franco, *The predicate modal logic of provability*. Notre Dame J. Formal Logic 25 (1984), no. 2, 179–189.

[4] Segerberg, Krister, *An essay in classical modal logic*. Filosofiska Föreningen och Filosofiska Institutionen vid Uppsala Universitet (1971).

[5] Solovay, Robert M., *Provability interpretations of modal logic*. Israel J. Math. 25 (1976), no. 3-4, 287–304.

[6] Vardanyan, V. A., *Arithmetic complexity of provability predicate logics and their fragments*. (Russian) Dokl. Akad. Nauk SSSR 288 (1986), no. 1, 11–14.