負数×負数＝負数の計算理論

竹之下保雄（Yasuo　Takenoshita）

１．数学の世界では、負数×負数＝正数である。その理由は、①もし負数×負数＝負数であれば計算が煩雑になる。②具体的な現象からの説明が可能。③交換法則、分配法則、結合法則を成り立たせるために負数×負数＝正数とした。④様々な数学的手法での証明が可能。しかし 2006 年、アメリカの Albert A,Martinez は、「Negative　Math」の本で、負数×負数＝負数が成立する理論を示した。それでは、従来の説明にはどこに問題があったのだろうか。それについて、詳しく説明したい。なお正負の符号は+，-、加減の演算記号は＋，－とし、分けて使う。

２．「具体的現象からの説明 」の問題点

ある人が毎分 60m で東に向かって 5 分間歩く。この人の進む距離から式を作る。なお東の方向をプラス、未来をプラスとする。

　5 分後　東に 300m の地点にいるので　$(+60)\times(+5)=+300$m

　5 分前　西に 300m の地点にいるので　$(+60)\times(-5)=-300$m

毎分 60m で西に向かって 5 分間歩く場合

　5 分後　西に 300m の地点にいるので　$(-60)\times(+5)=-300$m

　5 分前　東に 300m の地点にいるので　$(-60)\times(-5)=+300$m

この説明では、なぜ未来をプラスにするのかが明確ではない。もしマイナスであれば別な計算体系が作れる。

東の方向をプラス、未来をマイナスとし、毎分 60m で東に向かって 5 分間歩く。

　5 分後　東に 300m の地点にいるので　$(+60)\times(-5)=+300$m

　5 分前　西に 300m の地点にいるので　$(+60)\times(+5)=-300$m

毎分 60m で西に向かって 5 分間歩く場合。

　5 分後　西に 300m の地点にいるので　$(-60)\times(-5)=-300$m

　5 分前　東に 300m の地点にいるので　$(-60)\times(+5)=+300$m

従って最初の式は、現象から導かれたのではなく現象にあてはめただけといえる。

３．数式を使っての「負数×負数＝正数」の証明の問題点

R.Courannt、H.robbins 著　「What is Mathematics ?」から

もし、$(-1)\times(-1)=-1$ が成り立つとする。 $-1\times(1-1)=-1-1=-2$

答えは 0 になるはずなのに-2 となり矛盾する。従って、$(-1)\times(-1)=+1$ である。

　この証明では、正負の符号を付けてみるとその問題点がよくわかる。

$-1\times(1-1)=(-1)\times\{(+1)+(-1)\}=\underline{(-1)\times(+1)}+\underline{(-1)\times(-1)}=(-1)+(-1)=-2$

ここには、$(-1)\times(+1)=-1$　 $(-1)\times(-1)=-1$ の２つの式があるが、左辺が異なる式にもかかわらず右辺が－1 で同じである。その為、矛盾が生じたのである。

もし、$(-1)\times(+1)=+1$、$(-1)\times(-1)=-1$　とすれば、

$(-1)\times\{(+1)+(-1)\}=(-1)\times(+1)+(-1)\times(-1)=(+1)+(-1)=0$ となり、矛盾は生じない。また、$(+1)\times(+1)=-1$、$(+1)\times(-1)=+1$、$(-1)\times(+1)=+1$、$(-1)\times(-1)=-1$ としても、交換法則、分配法則、結合法則は成り立ち、決して煩雑ではない。

4．本題と関連した式「$-(-\gamma)=\gamma$ の証明」の問題点　岩波基礎数学、小平邦彦著

$\alpha=(\alpha-(\beta-\gamma))+(\beta-\gamma)=(\alpha-(\beta-\gamma)+\beta)-\gamma$　両辺に $\gamma-\beta$ を加える。

$\alpha+\gamma-\beta=((\alpha-(\beta-\gamma)+\beta)-\gamma+\gamma-\beta=\alpha-(\beta-\gamma)$　右辺と左辺を入れ替える。

$\alpha-(\beta-\gamma)=\alpha+\gamma-\beta$　　$\alpha=\beta=0$ とすれば $-(-\gamma)=\gamma$

これを簡単にすれば、$+(-\gamma)=-\gamma$　を前提にした証明と同じである。

$+(-\gamma)=-\gamma$　　$-\gamma=+(-\gamma)$　　$-\gamma+\gamma=+(-\gamma)+\gamma$　　$0=+(-\gamma)+\gamma$

$0-(-\gamma)=+(-\gamma)+\gamma-(-\gamma)$　　$-(-\gamma)=+\gamma$　　これより、$-(-\gamma)=\gamma$

しかし、$+(-\gamma)=-\gamma$ は証明していないので、完全に証明したとはいえない。

5．様々な定義による計算体系について（$^{+}$：次の数、$^{-}$：前の数を意味する。）

定義Ⅰ（従来の加法・減法の定義）

① $(+a)+0=(+a)-0=+a$

② $(+a)+(+b)^{+}=\{(+a)+(+b)\}^{+}$　　$(+a)-(+b)^{+}=\{(+a)-(+b)\}^{-}$

③ $(+a)+(+b)^{-}=\{(+a)+(+b)\}^{-}$　　$(+a)-(+b)^{-}=\{(+a)-(+b)\}^{+}$

例　$(+1)+(+1)=(+1)+0^{+}=\{(+1)+0\}^{+}=(+1)^{+}=+2$

$0-(+1)=0-0^{+}=(0-0)^{-}=0^{-}=-1$

定義Ⅱ（定義１を変形した新しい計算）

① $(+a)+0=(+a)-0=+a$

② $(+a)+(+b)^{+}=\{(+a)+(+b)\}^{-}$　　$(+a)-(+b)^{+}=\{(+a)-(+b)\}^{+}$

③ $(+a)+(+b)^{-}=\{(+a)+(+b)\}^{+}$　　$(+a)-(+b)^{-}=\{(+a)-(+b)\}^{-}$

例　$(+1)+(+1)=(+1)+0^{+}=\{(+1)+0\}^{-}=(+1)^{-}=0$

$(+1)-(+1)=(+1)-0^{+}=\{(+1)-0\}^{+}=(+1)^{+}=+2$

定義Ⅲ（従来の乗法の定義、ただし加法・減法は定義Ⅰを使う。）

① $(+a)\times 0=0$　　② $(+a)\times(+b)^{+}=(+a)\times(+b)+(+a)$

③ $(+a)\times(+b)^{-}=(+a)\times(+b)-(+a)$

例　$(+1)\times(+1)=(+1)\times 0^{+}=(+1)\times 0+(+1)=0+(+1)=+1$

定義Ⅳ（定義Ⅲを変形した新しい計算体系、ただし加法・減法は定義Ⅰを使う。）

① $(+a)\times 0=0$　　② $(+a)\times(+b)^{+}=(+a)\times(+b)-(+a)$

③ $(+a)\times(+b)^{-}=(+a)\times(+b)+(+a)$

例　$(+1)\times(+1)=(+1)\times 0^{+}=(+1)\times 0-(+1)=-1$

$(-1)\times(-1)=(-1)\times 0^{-}=(-1)\times 0+(-1)=-1$

他に、定義Ⅱと定義Ⅲ、定義Ⅱと定義Ⅳなどの組合せで他の計算理論も作れる。従来の証明では絶対値と正数を同じものとみなし、$2\times 3=6$ より $(+2)\times(+3)=+6$、ここから $(-2)\times(-3)=+6$ 等を証明した。しかし、$[(-\pi)+(+3.1)]$(ガウス記号)の値を求める場合、最初に $-\pi$ と $+3.1$ の絶対値を比較する。$\pi>3.1$ より、$(-\pi)+(+3.1)=-(\pi-3.1)$　$-1<-(\pi-3.1)<0$ から $[(-\pi)+(+3.1)]=-1$ となる。ここでは、絶対値と正数を区別して計算している。このように、本来２つの数は異なる数であり、これを前提にした計算理論「負数×負数＝負数」等にも、当然、正当性はあるといえる。