

量子論における固有時

久高将壽、松本修一 (Shoju Kudaka, Shuichi Matsumoto)
琉球大学

特殊及び一般相対論はその理論構成の前提条件として“時計”の存在を仮定しているように思われる。粒子が占める位置で起こるある特定の事象の系列を、『時計の読み』と言う概念と整合な形で選択する何らかの物理的過程の存在を仮定するのである。この整合性の条件を Synge は次のように表現している：ある物質粒子の世界線と、その上の事象 B, A を考える。 A より B が時間的に早く起きるとする。粒子は二つの時計を運んでいるとして、それぞれは B, A 間で tick-tack と時を刻むが、tick の個数を n_1, n_2 で表す。この時

For two standard clocks, the ratio $n_1 : n_2$ is a natural constant, independent of the world-line on which the observations are made and of the events on that world-line.

この物理的な要請がもし満たされなければ、彼の言葉を借りれば、現在ある形での一般相対論は捨て去られるか、もしくは時間の測定に関する何か奇妙な仮定を持ち出さなくては行けない。位置のみを自由度に持つ点粒子に時計を運ばせる時、すなわち固有時を考える時、この要請が満たされるからこそ、固有時（これを以下 τ_{cl} で表す）は

$$d\tau_{cl} = \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} \quad (*)$$

を通して数学的な意味での時空点間の距離と同定することが可能となり、時空のリーマン多様体としての構造に結び付き得るのである。数学的对象にかく抽象化できる現実の過程が存在することは、決して自明なことではなく、その構造から導き出される数々の論理的帰結の豊潤さは、等価原理と共に、理論構成の基礎にあるこの事実の深遠さの反映であると考えられる。

点粒子の固有時の物理的特性が古典的相対論において持つこの重要性に注意を向けるならば、同様な役割を量子論において果たし得る固有時の概念がないものかという疑問が浮かぶのは極々自然なことであろう。すなわち

1. 固有時の概念は量子論の枠内で定式化可能か？
2. それがもし出来るのであれば、その物理的特性が何らかの有意味な時空の構造を明らかにする可能性があるか？

と言う問題意識がである。

Dirac の相対論的量子論をスピン $1/2$ の粒子の一粒子状態を記述する量子力学とみて、その理論的枠内で固有時を論じる為に、我々は Wheeler による 1941 年のアイデアを取り上げた：『正エネルギー粒子に対しては座標時間 t の増加と共に増加し、負エネルギー粒

子に対しては t の増加に伴って減少する』と言う Wheeler の条件を満たす『固有時』は (これを以下 τ で表す)、少なくとも重力の影響のみを受けて自由運動するディラック粒子に対しては

$$d\tau = \sqrt{-g}\psi^\dagger\beta\psi d^4x$$

によって定式化できる。この意味で先の問題意識の前半への答えは肯定的である。古典的な固有時の概念と整合であって、かつ上記の Wheeler の条件を満たすものは、自然に考える限りこれ以外に無さそうである。 τ 自身は演算子ではないが、座標時間に対するその進捗の度合い $d\tau/dt$ は演算子で表される。

先の問題意識の後半を検証するためには、『固有時』が時空距離の概念でどこまで記述可能かを見るのが一つの方法であろう：その為に我々は、(*) 式の右辺を $d\tau_{cl}/dt$ を表す表式へ変形し、そこに現れる導関数 dx^j/dt を速度演算子で置き換えることによって、一つの演算子へ昇格させることを試みた。これは固有時 τ_{cl} の座標時間に対する進捗の度合い $d\tau_{cl}/dt$ に対応する演算子であると解釈できるので、『テンポ演算子』 \mathcal{T} と名付けた。テンポ演算子はその作り方から正エネルギーを持つ状態ベクトルにのみ作用する演算子だが、時空距離の概念を量子論的な概念と関連付けるとするならば、おそらくこのテンポ演算子を介する以外に方法はないであろう。

次の結果を計算によって示すことが出来る：

1. 『固有時』 τ の座標時間 t に対する進捗の度合い $d\tau/dt$ とテンポ演算子 \mathcal{T} とが、正エネルギー状態に対する期待値のレベルでは一致する。すなわち正エネルギー状態のみが関与する状況では Wheeler の『固有時』と古典的な意味での固有時は区別できない。しかも、『固有時』が負エネルギー状態で座標時間とは逆向きに増加することが、この一致を成り立たしめる為に不可欠であることも分かる。このことは、『固有時』 τ が古典的な固有時 τ_{cl} の自然な拡張として唯一妥当なものであることを主張していると解釈できる。
2. 演算子 $d\tau/dt$ は正負のエネルギー状態間を結ぶ 0 でない行列要素を持つ。従って、この演算子の任意の状態に関する期待値は、もはやテンポ演算子のみでは表すことが出来ない。このことは、『固有時』の物理的特性を表現し得る数学的概念をもし見出すことが出来れば、もちろんそれは、演算子との間の関連を明確に持っているが為に幾何学的記述方法からの前進を何らかの形で示すものになるはずだが、更に、単なるテンポ演算子のレベルの概念にとどまらず、それを越えたものになることを示唆していると解釈できる。

ただその望まれる数学的概念に関しては、明確なことをここで述べ得る段階までには、残念ながら至っていない。