

極限再帰という計算概念の基礎

八杉 満利子 (Mariko YASUGI)

京都産業大学・京都大学

問題の背景は「計算可能性」という概念を含む連続体上の数学研究である。とくに解析学における計算可能性の研究は「計算可能解析学」とも呼ばれている。その研究方法は通常の数学となんら変わらない。しかし「計算可能性」を扱う以上、そこで「計算」と主張される概念が実際に「計算」と認められることをなんらかの方法で確認しなければならない。我々の計算可能解析学では自然数上の計算論としては再帰関数論を採用している。すなわち、解析学における計算可能性は再帰関数の計算可能性を基礎にしている。しかし有意義な数学の展開のためには、再帰性を超える必要があり、それが問題の焦点なのである。

連続体上の計算可能性理論は、有理数列による実数の構成や連続関数の連続率などを再帰関数によって支配することから出発する。そのようにして得られる対象物を計算可能実数、計算可能連続関数、などと呼ぶ。他方、解析学においては多くの不連続関数が重要な役割を果たす。実際に不連続点における関数値を評価しようとする、一般に再帰関数を基礎にした計算可能性の枠組みを超えることが知られている。このために、不連続関数の関数値の計算に関する理論が、計算可能解析学における課題の一つとなっている。その課題を扱う手段の一つとして、Goldにより学習理論のために導入された「極限再帰関数論」が有用である。

極限再帰関数とは再帰関数の極限值（それが存在するときに）を値とする関数であり、その評価過程はおよそ次のように述べられる。

“各引数に対して決定可能なプロセスが生じ、それが無限回続く。無限回のプロセス全体の観察によって値を取得する。”

このような評価手続きでは、停止性（有限回でのプロセスの終了）が成り立たず、そのために極限再帰を計算とみなせるかどうかの問題になる。内容豊富な計算可能解析学の展開のためには極限再帰（またはそれに匹敵する原理）が必要なのであり、我々はその計算としての認識を何らかの手段によって妥当化すること、換言すれば、広義の意味での停止性概念を極限再帰に対して付与すること、を目標にしている。

本論では考察の対象を「計算設計」という概念で明示し、原始再帰、一般再帰、極限再帰に対応する計算設計を考え、それらから誘導される計算モデル（評価過程のイメージ）を描いてみる。計算設計の「コンパクト性」を検討し、それから誘導される「集合列の単調有界性」の原理を提案する。コンパクト性（極限再帰に関していえば単調有界性）が持つ認識論的な価値は、それがあつる種の「思考の節約」を可能にする点にあると考え、コンパクトな計算設計を持つ極限再帰を「計算」の一種として位置付

けることを試みる。

なお、本論の目的は極限再帰が計算という概念に値する、ということのみを主題にしているのであって、計算とは何か、などの一般論に関わるものではないことを明言しておきたい。たとえば再帰関数は計算可能であると認め、それを以後の検討における基盤にしている。また、数学あるいは論理学における事実はすべて受け入れ、それらも考察の基盤にしている。