

# 解析学の厳密化と数概念

中根美知代 (Michiyo NAKANE)  
立教大学理学部

## 1. はじめに

古代ギリシアでは、数とは1を除く自然数と理解されていた。数とみなされたのは、それらとそれらの商である正の有理数だけであった。今日、数の概念は拡張され、無理数・負の数・複素数といったものまで含めて「数」と呼ばれている。

ところが今日の「数」の定義は明確になっていない。自然数、有理数、無理数や実数については、読者の程度に応じて、さまざまな定義がなされているが、「数」そのものの性質を明確に規定したものは、ほとんど見かけない。岩波『数学事典』に、「四則演算ができ、その間に大小の順序関係が入る」とも読み取れるような記述が見られる程度である。

19世紀後半、解析学の厳密化にかかわる考察の中で、数学者たちは、無理数を「創造」した。そして、その手続きは、今日でも受け入れられている。これを検討することにより、どのような特徴を持つものが「数」といわれるのか、考察していく。

## 2. 実数を作り出す過程に見られる「数」

### 1) Dedekind の「数」

Dirichlet の『整数論講義』(1861年)を整理して出版する過程で、Dedekind は彼自身の考察の成果もそこに取り込んだ。彼は、整数の商として有理数を定義し、有理数が加法・減法・乗法・除法という4つの基本演算について閉じていることが、この定義から自然に導かれたかのようにして議論を進めている。実数や複素数の集合はこれら四則演算について閉じている。彼は、これを「(数)体」と呼んでいる。また、すべての有理数の集合は最小の体、すべての実数と複素数すべての集合は考える最大の体で、その間にすべての実数の作る体があるとしている。この時点では、無理数の定義はない。また、実数は有理数と無理数からなるとされている。

Dedekind はまた、微分積分学を講義するにあたって、実数の連続性を厳密に示そうとした。その手続きは、『連続性と無理数』(1872年)で示されている。彼は、「切断」によって有理数のみならず「無理数」を定義することにより、数直線上の点と実数を対応させた。そのとき彼は、「切断」が大小による順序を持ち、そこに四則演算が定義され、それについて閉じていることを示すことによって、「切断」が数であるとしている。

## 2) Cantor の「数」

Cantor もまた、1872 年の論文で、有理数から無理数を作り出している。彼は「有理数からなる数列  $a_1, a_2, \dots, a_n$  が、任意の正の有理数  $\varepsilon$  について、 $n$  よりも大きい整数  $m$  と  $n$  に対し、 $|a_{m+n} - a_n| < \varepsilon$  となる」数列の性質を「極限  $b$  を持つ」と表現し、この数列を  $b$  で記号づける。この数列の同値類を定義した上で、それを実数と対応させた。その際は彼もまた、この数列の間に大小関係が入ること、また四則演算が定義され、それについて閉じていることを示して、このような数列で実数を定義することができたとしている。

## 3. 「数」の定義とは

Dedekind も Cantor も、無理数を「創造」した。それは、「切断」であったり、「数列」であったりした。それらが、有理数同様、全順序をもち、四則演算について閉じているから、彼らは自分たちの「創造物」もまた数である、と主張したのである。今日の教科書でも、無理数ないしは実数を構成するとき、全順序が入ることと四則演算について閉じていることが確認されている。

Dedekind は『整数論講義』では、有理数がそのような性質は定義から自然に導かれたかのように扱っていた。ところが、『連続性と無理数』では、このような条件をみたすものとして有理数が構成されたと仮定している。その上で、彼は、「切断」は有理数と同じ性質をみたすから、それは有理数と同等にあつかつてよいという立場をとっている。

『連続性と無理数』の着想は 1858 年にあったのだから、『整数論講義』にかかわった時期とほぼ同時期となる。Dedekind は、有理数が四則演算について閉じていることを、状況に応じて、自明であるとしたり、仮定としたりしていたことになる。

全順序を持ち、四則演算が定義できることは、有理数の一性質なのか、仮定なのか、定義なのか。Dedekind は実数のどのような面を問題にするかに応じて、態度をかえている。「数」を定義できないのは、このような理由があるためかもしれない。