ウィトゲンシュタインと対角線論法

水本正晴(Masaharu Mizumoto)

北見工業大学

カントールの対角線論法を批判するとは、科学基礎論学会に相応しいトンデモな発表かもしれない。実際ウィトゲンシュタインのそれは、ゲーデルの不完全性定理批判と並ぶ、悪名高いものである。だが同時に、しばしば過激な構築主義者のように見なされる彼が対角線論法を批判するのも当然と思う人もいるだろう。しかし構築主義的な批判はそれだけでは面白いものではない。ここではより具体的に、彼の二つの論点、

（1）カントールが示したのは実数と自然数が一対一に対応付けることができない（全単射が存在しない）ということだけであり、基数の違い（非可算無限の存在）を示したわけではない、
（2）ヒュームの原理を基数の分析として受け入れる必要はない、

に焦点を当て、そこから彼の示唆するように、「別の数学」の像を描くことができるのかを検討したい。

普通に考えれば、上の二つの論点の関係は、（2）ゆえに（1）なのであると思われよう。だがその場合、ウィトゲンシュタイン自身の積極的な数の理論というものが提示されない限り、数学者もそのような言い掛かりを相手にしないだろう。だがここで私は、むしろ（1）が（2）への根拠を与えるのである、と論じる。

まず第１の論点については、たとえヒュームの原理を受け入れていたとしても、ウィトゲンシュタインは正しかったと言える。カントールのオリジナルの対角線論法には確かにギャップがあり、非可算無限を証明してはいない。だがこれは、すぐベルンシュタインの定理によってすでに埋められた、とされる。しかしながら、なぜカントールの証明が不完全なものであったかの考察は、補完された証明もまた本質的に<u>背理法</u>に訴えるものであったことを示し、その後のチューリング次数の理論の発展と考え合わせたとき、さらなるギャップの存在を示唆する。そこにおいて重要な役割を演じるのは、<u>チューリングの</u>対角線論法である。そこでは、自然数から実数へのどんな特定の単射によって生み出される対角線上の新たな実数も、その単射がオラクルによって与えられると考えるならば、より高い次数に属するオラクルによって、それまでの実数と共にすべてもう一度一列に並べることができる。

ところで過激な構築主義者は、カントールの証明をそれが非可述的であるとして批判するが、それはどんなチューリング・ジャンプをも許さないことに対応する。それに対し、ここでは、どのチューリング・ジャンプも<u>矛盾が導かれない限り</u>正当である、

と考える。従ってカントールの証明によって矛盾が導かれる直前のチューリング・ジャンプまですべて認められる。そのオラクルは、しかし、すでに実数をすべて計算することができるのである。（これは実数の複雑性の階層をすべて認めながら非可算性を否定するという「中間の道」ということになる。）

ここでの中心的前提は、A.どんな超越的手続きであっても、その（絶対的／相対的）チューリング次数を問うことは有意味である、というものであり、計算論の発展は、この前提を日々最もらしいものとしている。（そしてこれは実数の非可算性が証明されていない段階ではトリヴィアルな論点先取ではないことに注意。）だがそれと同時に、素朴な構築主義的直観として、B.次数のより高い手続きは、より最もらしくない、より非・現実的である、と我々には思われる。AとB両方を前提するとき、ギャップが埋められれたはずの、より厳密な対角線論法にもまた、埋められるべきギャップが存在し、非可算無限の存在は論理的に導かれてはいないということが明らかになる。むしろそこでは、もとのカントールの議論自身が（無限集合における）ベルンシュタインの定理を否定するものと解釈できること、そしてその解釈に基づけば、すべての計算不可能な実数（オラクル）を認めても、実数は可算を超えないということ、その結果、可算な無限はすべて等数であるとそれでも考えるならば、ヒュームの原理を見直さねばならなくなること（ウィトゲンシュタインの第２の論点）、が「より最もらしい」選択肢の帰結として示される。（当然ながら、カントールの対角線論法のみを批判してもアドホックな批判にしかならない。だが全く同様の議論は、実数の非可算性を証明する彼の最初の 1874 年の証明、およびより一般的なべき集合定理にも当てはまるということも示される。）

ここで指摘されるギャップを埋めるためには、カントールの擁護者は、実数の非可算性やより高いチューリング次数の存在を前提することなく、「実数すべてを計算するオラクル」の仮定から矛盾を導く必要がある。だが、それは無理であるように思われる。この「中間の道」においては、そのようなオラクルは、計算可能な仕方で選択関数に変換することができるし、選択関数は最低限そのようなオラクルを要請する。従ってそのオラクルの仮定から矛盾を導き出すことは、選択公理が矛盾していると証明することに等しいからである。

もちろん、ここでの議論を一度聞いただけでは、多くの数学者は納得できないであろう。ウィトゲンシュタインは、対角線論法がカントール以前からよく知られていたような状況を想像させ、そこでカントールの証明がどう見えたかを考えさせるが、まさにここで必要なのは、単なる形式的な議論より、そのような仕方で、これまでのカントールの証明が一つの説得的な像にすぎず、その証明から導かれる別の結論、別の数学の像がある、ということを類比や想像で取り囲むことで説得することである。

この批判が正しければ、非可算無限の無限の階層、というカントールのパラダイスは、むしろ我々の素朴な直観に反する前提に基づく非・ユークリッド幾何学のようなものとして、カントールによって発明されたものであったということになる。最後に我々は、ユークリッド幾何学に対応する、（多くのウィトゲンシュタイン解釈者の考えるような）過激な構築主義でない、「中間の道」としてあり得たはずの別の数学の描像を時間の許す限り描き出してみたい。