

# 述語線形論理の圏論的モデル

白旗 優

慶應義塾大学商学部

本発表では、ゲーデルのダイアレクティカ解釈によって得られる述語線形論理の圏論的モデルについて紹介し、そのモデルと親和的であると思われる存在論の枠組みについて述べたい。

線形論理は、ゲンツェン流のシーケント計算から、縮約、弱化、交換という構造規則の適用を制限もしくは明示化することで得られる論理であり、元にするシーケント計算の体系が古典的であるか直観主義的であるか、命題論理か述語論理か、どの構造規則を制限するかによって、様々なバリエーションがある。

連言と含意だけを持つ直観主義的命題シーケント計算から、縮約規則と弱化規則を除いて得られる線形論理は IMLL と呼ばれるが、これは圏論でいうモノイダル閉圏によって解釈することができる。おおまかに言えば、命題  $A$  は対象  $[A]$  に対応付けられ、前提  $A$  から結論  $B$  に至る証明を、 $[A]$  から  $[B]$  への射として解釈する。モノイダル閉圏は、線形空間やそれを一般化したモジュールのつくる圏であり、数学的にはよく知られた構造である。古典的命題線形論理についても、 $*$ -autonomous 圏と呼ばれる圏によって解釈することができるが、これはモノイダル閉圏ほど自然に登場してくるものではない。

命題論理の圏論的モデル、あるいは少なくとも代数的モデルがあたえられているときに、そこから述語論理のモデルをつくるのは、形式的にはそれほど困難なことではない。大まかに言えば、それぞれの自然数  $M$  について、 $M$  個の自由変数を持つ論理式とそのあいだの証明に対応する圏  $C(M)$  を考え、 $C(N+1)$  と  $C(N)$  のあいだに、限量子に相当する関手が存在して、それが  $C(N)$  から  $C(N+1)$  への埋め込みを表す関手と随伴を構成することを要請してやればよい。厳密には、これは指標付き圏という形で記述される。しかし、線形述語論理を解釈する指標付き圏を形式的に記述することと、実際にそうした圏を形づくる自然な数学的構造があるということとは、また別の事柄である。

ところで、ゲンツェンのシーケント計算は、本来はカット除去定理を通じて一階算術の無矛盾性を証明するための仕組みであった。ゲーデルもまた、独自の方法で無矛盾性証明が得られることを示したが、それがいわゆるダイアレクティカ解釈である。

ダイアレクティカ解釈は、直接的には一階の直観主義算術に対する解釈である。ところが、その命題論理に関わる部分を抽出して、圏論的にまとめてみると、それはモノイダル閉圏となる。これは、ハイランドの着想に基づいて、ド・パイバが直観主義的線形論理の解釈として提示したものである。ド・パイバは、ジラルの示唆のもと、さらにこれに手をいれて、古典的線形命題論理の解釈となる圏も得ている。

この解釈は命題論理に関するものであったが、ダイアレクティカ解釈での限量子の

解釈を、ほんの少し修正するだけで、弱化規則を容認する古典的線形述語論理の解釈が、そっくりそのまま得られるということ、発表者は見いだした。これは、圏論的にもちょうど先に述べたような条件をみたく指標付き圏を形づくっている。さらに、この解釈は、古典論理の論理式に対して、古典論理の線形論理への翻訳を介することで、古典論理から直観主義への二重否定翻訳を介したゲーデルのダイアレクティカ解釈と、本質的に同じ解釈をあたえることもわかった。

発表者流のダイアレクティカ解釈は、全称限量子と存在限量子、連言と選言、といった双対的な論理的構成に関して、完全に対称的であり、ゲーム論的な印象を強くあたえる。実際、ゲームでの戦略という言葉を使って、この解釈を述べ直すことも可能である。ラムダ計算のゲーム意味論をふまえると、一般に項は戦略として理解することができる。そして、存在限量子に代入される項を文の確証戦略、全称限量子に代入される項を反証戦略とみなすと、ダイアレクティカ解釈が述べているのは、文が証明可能であれば、その文に対するいかなる反証戦略をも打ち破る確証戦略が構成できるということである。

さて、項を戦略とみなす以上のような解釈に沿った形で、具体的個物に関する言明を理解することはできないだろうか。つまり、限量の対象となる具体的個物をなんらかのゲームでの戦略とみなしてもよいのではないか。

具体的個物を論理的に記述する場合、個物の持つ性質や内部構造は、基本的には述語によって記述される。ところが、伝統的なモデル論では述語は個物の集合として解釈されてしまうので、結局は bare particulars から、すべてを組み上げているわけである。そうした極端な外延主義に対して、ライブニッツ流の内包主義を、ゲームでの戦略というより洗練された形で、復活させられないだろうか。

しかし、個物がそこでの戦略となっているゲームでの moves は何なのか、という疑問が生じるだろう。それは、特性的普遍の現れ (tropes, abstract particulars) だというのが、発表者の考えである。実際、ラムダ計算のゲーム意味論での moves は、型の2つの現れを区別するように指標をあたえられるので、tropes として理解するのにふさわしい。