弱い2階算術における複素解析学

堀畑 佳宏

東北大学大学院

本研究は，逆数学プログラムに従い，複素解析学の基礎，特にピカールの小定理に対し逆数学的評価を行うことが目的である．ピカールの小定理は ACA_0 で証明できることが知られていたが（[2]），今回，ACA_0 よりも弱い公理系 WKL_0 でピカールの小定理が証明できることが示せた．

「逆数学プログラム」とは，フリードマンによって始められた数学基礎論における一プログラムである（H. Friedman[1]）．本プログラムの目的は，2階算術の枠組みにおいて，数学の諸定理を，その証明に必要十分な集合存在公理の強さで分類することである．

もう少し詳しく見てみる．2階算術 Z_2 とは，自然数とそれらの部分集合のみを対象とする公理系である．ヒルベルトやベルナイスによって，Z_2 ではほとんど全ての古典数学が展開できることが知られている．したがって当時の数学基礎論における一つの大きな目標は公理系 Z_2 の無矛盾性を「有限の立場」において証明すること（ヒルベルトプログラムと呼ばれる）にあったが，これはゲーデルによる不完全性定理によって，有限の立場どころか Z_2 においてすらも不可能であることが示された．しかしながらフリードマンやシンプソンらによって，Z_2 の特徴的な公理である集合存在公理を弱めることにより得られる部分公理系でどれくらいの数学が展開できるか，あるいはできないのか，が研究され始めた．ここで，RCA_0 とは，Z_2 の集合存在公理を計算可能な集合の存在を主張する公理に弱めることによって得られる部分公理系である．この公理系で展開できる数学は，計算機が扱うことのできる数学に対応する．逆数学とは，この公理系を足場として，数学の諸定理を，RCA_0 で証明できるもの，また証明できない場合はその証明のために RCA_0 にどれくらい強い集合存在公理を付加する必要があるのかを調べる分野である．数学の諸定理をその証明のために必要十分な公理系で分類したとき，数学の定理は無数に存在するので，それぞれに対応する公理系は無尽蔵に現れそうであるが，シンプソンらによる逆数学の研究により，数学の定理の多くが，5つほどの特徴的な公理系に分類されることが知られている（S. G. Simpson[5]）．これらの公理系で本研究に現れるものは弱い順に，$\mathsf{RCA}_0, \mathsf{WWKL}_0, \mathsf{WKL}_0, \mathsf{ACA}_0$ が挙げられる．

逆数学の研究の特色には以下が挙げられる．フリードマンの定理により，WKL_0 の無矛盾性に関しては，有限の立場の形式化と呼ばれている算術の公理系 PRA と同等であることが示されている．つまり，PRA が無矛盾であれば WKL_0 も無矛盾であることが示されている．そして WKL_0 が展開できる数学の豊富さと合わせて考えると，この結果はヒルベルトプログラムの現代版と呼ばれることもある（S. G. Simpson[4]）．また，逆数学研究による諸定理の分類において同じ階層に属する定理の間に抽象的な類似性を見て取れることがある．

複素解析学の逆数学的研究は横山啓太氏によって始められた（K. Yokoyama[6, 7]）．[6] では，コーシーの積分定理が WKL_0 と同値であることが示された．[7] では超準的手法を用いて，リーマンの写像定理と ACA_0 が同値になることが示された．本研究はこれらを応用し，複素解析学の逆数学的研究を推し進めるものである．

ピカールの小定理は，持ち上げの存在定理と次の事実から証明される．

(†) $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ の被覆空間として $\Delta(1)$ がとれる．

まず，持ち上げの存在については，これと WKL_0 が同値になることが知られている（[2]）．ま

た，リーマンの写像定理を用いれば (†) は導ける．したがって，ACA_0 からピカールの小定理は証明できる．しかしながら，(†) を導くためには，その証明においてリーマンの写像定理を用いて構成する双正則写像の定義域が具体的なものであるので，より弱い形のリーマンの写像定理で十分であることが予想された．

実際に，(†) を示すには以下の形のリーマンの写像定理で十分であり（弱リーマンの写像定理と呼ぶ），また本研究において弱リーマンの写像定理が RCA_0 で証明できることが示された（一般のリーマンの写像定理に対し，本質的に弱い形になっている）．

まず次を定義する．

Definition 1. *s-path* $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ とは，$\gamma_i : [(i-1)/n, i/n] \to \mathbb{C}$ の有限列 $\langle \gamma_1, \cdots, \gamma_n \rangle$ で，各 γ_i は直線か円弧の一部で，$\gamma_i(i/n) = \gamma_{i+1}(i/n)$ をみたすものをいう．また，*semi-polygon* とは，s-path γ で，$\gamma_1(0) = \gamma_n(1)$ をみたすものをいう．semi-polygon γ が $\gamma(s) \neq \gamma(t)$ $(0 \leq s < t \leq 1)$ をみたすとき，*simple* であるという．

次の結果が得られた．

Theorem 1 (弱リーマンの写像定理 [3])**.** RCA_0 で以下が証明できる．γ を simple semi-polygon とし，$D_0 := \mathrm{Int}(\gamma)$ とする．φ を $0 \in \varphi(D_0) \subseteq \Delta(1)$ となる一次変換とする．$D := \varphi(D_0)$ とおくとき，双正則写像 $f : D \to \Delta(1)$ が存在して $f(0) = 0$ となる．

これは，RCA_0 において，双正則写像を再帰的に構成することによって証明される．また RCA_0 において，この定理から (†) が導ける．したがって，先の持ち上げの存在定理とあわせると次が得られる．

Theorem 2 (ピカールの小定理)**.** WKL_0 で以下が証明できる．$\mathbb{C}$ 上の正則関数は，除外値を 3 つ以上持つとき定関数である．

この証明は [3] を見よ．

参考文献

[1] H. Friedman. Some systems of second order arithmetic and their use. In *Canadian Mathematical Congress*, volume 1, pages 235–242, 1975.

[2] Y. Horihata. *Reverse mathematics of complex analysis and general topology.* Master's thesis, Tohoku University, February 2008.

[3] Y. Horihata and K. Yokoyama. Complex analysis in weak second order arithmetic. preprint.

[4] S. G. Simpson. Partial realization of Hilbert's program. *The Journal of Symbolic Logic*, 53:349–363, 1988.

[5] S. G. Simpson. *Subsystems of Second Order Arithmetic.* Springer-Verlag, 1999.

[6] K. Yokoyama. Complex analysis in subsystems of second order arithmetic. *Archive for Mathematical Logic*, 46:15–35, 2007.

[7] K. Yokoyama. Non-standard analysis in ACA_0 and Riemann mapping theorem. *Mathematical Logic Quarterly*, 53(2):132–146, April 2007.