ボーアモデルと相対論的速度

新村公剛（Kimitake Shinmura）
新村公剛公認会計士事務所

水素原子で、電子が、陽子を中心に、この周りを半径ａの円周上で等速円運動をしていて、量子条件を満たす模型をボーアモデルという。ボーアモデルでは、陽子と電子はｅの電荷を持つから、この模型の電子に働くクーロン力F_eと遠心力は、以下の式のように、等しくなければならない。ボーア半径ａより

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2}=\frac{m_e V_e{}^2}{a} \qquad (1)$$

$$a=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e V_e{}^2} \qquad (2)$$

である。ここで、ε_0は真空の誘電率、m_eは電子の質量、V_eは電子の速度である。ボーアモデルの量子条件は、ｈをプランク定数として

$$nh=2\pi a * m_e V_e \qquad (n=0,\ 1,\ 2\cdots) \qquad (3)$$

である。（２）式と（３）式より、半径ａは、ｎ＝１として

$$a=\frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2} \qquad (4)$$

である。また、ボーア半径ａは、ｎ＝１として　（３）式より

$$a=\frac{h}{2\pi m_e V_e} \qquad (5)$$

でもある。次に、ボーア半径を周回する速度V_eは、(4) 式と（５）式より

$$V_e=\frac{h}{2\pi a * m_e}=\frac{h}{2\pi m_e} * \frac{1}{a}=\frac{h}{2\pi m_e} * \frac{\pi m_e e^2}{\varepsilon_0 h^2}$$

$$=\frac{e^2}{2\varepsilon_0 h} \qquad (6)$$

である。さらに、（６）式の両辺を光速度ｃで割って、αと置くと、

$$\alpha=\frac{V_e}{c}=\frac{e^2}{2\varepsilon_0 hc} \qquad (7)$$

である。(7) 式の右辺の第２式は、微細構造定数である。微細構造定数αはボーアモデルの相対論的速度である。さらに、ボーア半径ａの円周の長さ２πａで電子は単位時間に $\frac{V_e}{2\pi a}$ 回で円を回る。これは単位時間に、以下の式の電気量Ｉが流れている。

$$I=\frac{eV_e}{2\pi a} \quad (A) \qquad (8)$$

である。ここで、磁束密度Ｂ（Ｔ）の一様な磁界に対して、同一平面で磁界と９０°で一定の速度V_e（ｍ／ｓ）で電子が円運動する時、電子は、ローレンツ力$F = eV_eB$を９０°方向に受け、このローレンツ力と遠心力が釣り合う。

$$eV_eB = \frac{m_e V_e^2}{a} \qquad (9)$$

（１）式の電荷のクーロン力と（９）式のローレンツ力と等しいとおくと、

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2} = eV_eB$$

$$BV_e = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$$

両辺に$\frac{V_e}{c^2}$を乗じて、$c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}$ より

（８）式より　$B * \frac{V_e^2}{c^2} = \mu_0 * \frac{eV_e}{2\pi a} * \frac{1}{2a} = \mu_0 * \frac{I}{2a}$

相対論的速度の$B_R = B * \frac{V_e^2}{c^2}$ より、 $B_R = \frac{\mu_0 I}{2a}$ （１０）

ここで、磁束は、１（ｗｂ）の磁荷から１本出るので、磁束Φは磁荷m_1（ｗｂ）に等しい。ボーア半径ａの球の中心に点磁荷がある時の一様な磁束密度は、

$$B = \frac{\Phi}{4\pi a^2} = \frac{m_1}{4\pi a^2} \qquad (11)$$

で、以下の相対論的速度を加味した磁荷のクーロン力の式（μ_0＝透磁率）とローレンツ力と等しいと置くことによっても、（１０）式が得られる。（１１式）を使って、

$$\frac{1}{4\pi\mu_0} * \frac{m_1^2}{a^2} * \frac{V_e^2}{c^2} = eV_eB = eV_e * \frac{m_1}{4\pi a^2}$$

$$\frac{m_1}{4\pi a^2} * \frac{V_e^2}{c^2} = \mu_0 * \frac{eV_e}{2\pi a} * \frac{1}{2a}$$

相対論的速度のB_Rの式と（8）式より　$B * \frac{V_e^2}{c^2} = B_R = \mu_0 * \frac{I}{2a}$ （１２）

で、このことは、相対論的速度の２乗を通じて、一様な磁束密度が中心部の磁束密度に変換されることを意味し、（１０）式と（１２）式より、電荷のクーロン力と相対論的速度を加味した磁荷のクーロン力とは等しいことがわかる。このことから

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2} = \frac{1}{4\pi\mu_0} * \frac{m_1^2}{a^2} * \frac{v^2}{c^2}$$

$$\frac{e^2}{\varepsilon_0} = \frac{m_1^2}{\mu_0} * \frac{v^2}{c^2} \qquad (13)$$

が得られ、この(13)式は、電荷と磁荷の関係式である。　以　上