一般対角線論法とラッセルの逆理

南尚亮（Takaaki Minami）

今回の発表では
(1) 対角線論法の(或る)一般形を提示し、
(2) それから Cantor の対角線論法が導かれることと、
(3) それが Russell の逆理と同値であることを証明する。

1. 対角線論法の(或る)一般形

[定理 1： 対角線論法の(或る)一般形]

X と Y を任意の空でないクラス、R を X の要素と Y の要素の間の任意の二項関係 (R⊆X×Y)、f を X から Y への任意の写像とすると、

(*1)　　$\forall x \in X[xRz \equiv \sim(xRf(x))]$

かつ z∈f(X)なる z は存在しない。(≡は同値、～は否定、以下同様。)

証明は次の補題を用いて行う。

[補題 1 : Russell の逆理の一般形]

X を任意の空でないクラス、R を X 上の任意の二項関係とすると、

(*2)　　$\forall x \in X[xRx' \equiv \sim(xRx)]$

かつ x'∈X なる x'は存在しない。

<証明>

(*2)なる x'∈X が存在すると仮定すると、直ちに $x'Rx' \equiv \sim(x'Rx')$ と云う矛盾に至る。よって、(*2) かつ x'∈X なる x'は存在しない。 ■

<定理 1 の証明>

X 上の二項関係 R'を

$$xR'y \equiv xRf(y)$$

で定義すると、補題 1 より

$$\forall x \in X[xR'x' \equiv \sim(xR'x)]$$

即ち

(*2')　　$\forall x \in X[xRf(x') \equiv \sim(xRf(x))]$

かつ x'∈X なる x'は存在しない。ここで(*1)かつ z∈f(X)なる z が存在するならば、或る x'∈X に対して z=f(x')となり、この x'は(*2')を満たす、つまり X の要素としては存在しないと云う矛盾に陥る。よって、(*1)かつ z∈f(X)なる z は存在しない。 ■

2. 定理 1 から Cantor の二つの対角線論法が導かれることを示す。

[系 1： 冪集合の濃度に関する Cantor の対角線論法]

定理 1 に於いて X を任意の集合、Y を X の冪集合 P(X)、R を∈、f を X から

P(X)への任意の一対一写像とすると、
(*3)　　$\forall x \in X[x \in Z \equiv \sim(x \in f(x))]$
かつ $Z \in f(X)$なる Z は存在しない。
　しかし、冪集合公理により(*3)なる $Z \in P(X)$は存在するので、X から P(X)へのどの一対一写像も上への写像にはなり得ない。よって $|X| < |P(X)|$ 。 ■

[系 2：実数の濃度に関する Cantor の対角線論法]
　定理 1 に於いて X=N(={0, 1, …})、Y=[0, 1]、R を
$$xRy \equiv (y\text{ の小数第}(x+1)\text{位} \neq f(x)\text{の小数第}(x+1)\text{位})$$
を満たす関係、f を N から[0, 1]への任意の一対一写像とすると、
(*4)　　$\forall x \in N[xRz \equiv \sim(xRf(x))]$
即ち(xRf(X)は常に偽になるので)
(*4')　　$\forall x \in N[xRz]$　　(z の小数第(x+1)位 ≠ f(x)の小数第(x+1)位)
かつ $z \in f(N)$なる z は存在しない。
　しかし、実数の連続性の公理により(*4')なる $z \in [0, 1]$は存在するので、N から[0, 1]へのどの一対一写像も上への写像にはなり得ない。よって $|N| < |[0, 1]|$ 。
　この議論を更に具体化すると下記の通り：
(a) [0, 1]の要素を 2 進表記した場合は、(*4')なる z は、
　　　z の小数第(x+1)位 = f(x)の小数第(x+1)位の反転
なる実数となり、実数の濃度に関する対角線論法のよく知られた形になる。
(b) [0, 1]の要素を 10 進表記して、z を例えば下記の通り
　　　z の小数第(x+1)位 = 0 (f(x)の小数第(x+1)位 = 9 の場合)
　　　z の小数第(x+1)位 = f(x)の小数第(x+1)位 + 1 (上記以外の場合)
に定義した場合、z は(*4')を満たし、この形の対角線論法も定理 1 の具体例となる。 ■

3. 定理 1 と補題 1 は同値である。補題 1 から定理 1 が導かれることは示したので、逆を示す。
[系 3]
　Russell の逆理の一般形(補題 1)は対角線論法の一般形(定理 1)から導かれる。
<証明>
　定理 1 に於いて、Y=X、f を X 上の恒等写像とすれば明らか。 ■

4. 定理 1 で一般化出来なかったこと
　定理 1 に於ける(*1)を満たす<u>Y の要素 z が存在する</u>ことは、一般には成り立たない(Y=X、f を X 上の恒等写像とすれば補題 1 より明らか)。それらの存在は、対角線論法が適用される個々の理論の公理に基づく：
・系 1 の(*3)を満たす z の存在は冪集合公理に、
・系 2 の(*4') を満たす z の存在は実数の連続性の公理に。
　今回対角線論法を一般化するに当たり、本件は一般化出来なかった。