

数学的認識の源泉と論理学

伊藤美香 (Mika ITO)
名古屋大学情報科学研究科

数学を言語という観点からみつめるとき、現在ほど情報科学との接点を見出せる時代はないといえる。それは同時に、言語表現の意味分析の探求とも重なってきた。ここでは「フレーゲ＝ヒルベルト論争」が、今日の情報科学における情報分析および計算分析の哲学的考察の源泉としての意義があることを提示して、ここでの数学的認識の源泉がどこからきているのか。認識の違いが何を意味するのか。またそれが情報科学における計算可能性の概念とどうかかわってくるのか等を示し、改めて論争にとどまらない可能性をみいだしている。適用させることで成し遂げられるという意味での「科学進歩」は、時として確かに必要なものであるが、その時の状況に左右されない本質的研究の存在が常に必要であることも示しているものといえる。

数学と論理学を統一的に述べることは難しい。「フレーゲ＝ヒルベルト論争」において論理学は本来、意味内容を確保する道具(記号論理学)であったことが再認識される。G.Frege(1848-1925)[3]は意味内容を明確化できるところに記号の役割をみだし、それは単に扱いやすさとしての形式というもの以上に優先されるべきものとして、数についての概念考察と結びつけられてきた。(その発展は広大であり一言で述べられるものではないが、分析哲学・記号論理学・数学基礎論周辺の研究に深く関わっている。)現在、こうした言語と数学との結びつきは、数学の一側面である計算理論においてさえも、例えば帰納的関数論において計算可能性の議論と深く関わってくる。

一方、数学の公理化・形式化が進められていったとき、数学における算術は、計算理論に直接結びつく概念であり、形式化によって現実的な計算が可能となる以上、その試みは必須であった。著書 Hilbert『幾何学基礎論』1899[2]は、公理的方法の思想をあらわすものであることは周知のごとくである。そして全数学をこの形式化(公理的方法)をもってとらえようとしたのが D.Hilbert(1862-1943)であった。

「フレーゲ＝ヒルベルト論争」を通して、ここで少し述べるとすれば、我々が一般にいう「形式化」について、実は「記号」と「形式」を単に同じものとして扱ってはならない、ということに気がつくはずである。そしてさらに深い哲学的考察が必要であるということが再認識されるのである。

上記における数学的認識の違いは 1900 年前後のその当時、数学とはどのようなものとして認識されていたのかを知る手がかりとなり、現在の数学を含めた計算理論においても多様な形で影響を与えているといえる。今日の計算機の発展とその限界によって「記号」「形式」の哲学的考察の必要性と意義が再認識されつつあるといえる。

計算理論は現在、アルゴリズムを対象とする帰納的関数論と非決定性アルゴリズムを対象とする計算量の理論に分けて考えられている。いずれも手探りのみの解決ですむものではなくっており、本質的な問題解決が必要である。その基礎は、今日のコンピュータ出現以前から始まるが「フレーゲ=ヒルベルト論争」は「プログラムを難しくしているものはなにか」という本質的な問いかけにも結びつく、源泉でもあったといえる。

一方で数学それ自体は、論理・計算だけでなく「証明」が確固として存在し機能してきた。H.Weyl(1885-1955)[1]は「・・・数学の定理の証明においては、ほとんど常にその直接の内容をはるかに超えねばならぬということだけは真である・・・。」と述べて(道具としての)数学の無限の発展をみいだしている。また先に述べた『幾何学基礎論』1899 をとりまく歴史的背景においても、解析学の厳密さが、幾何学の厳密さに負う形で演繹的理論構成が重視されていったことと証明概念は結びついてきた。いずれにしても数学は証明と切り離すことが出来ないものとして今に至っている。

現在、それ自体が意味をもたない形式的演繹理論には、限界があることがわかっている。言いかえれば、全数学を形式的演繹理論だけでとらえることができないということの意味するところは非常に大きかったといえる。

多くの理論は自然言語でまず定式化される。ここで「記号」「形式」をふまえた証明可能性の概念の考察が意味をもってくる。例えば「公理」「定義」「命題」「定理」という見方が、数学証明における厳密性維持に必要であることを、超数学 Metamathematics がもたらした大きな功績であるとするならば、論理学の本来の役割がなお意味をもつ。「何が証明でき、何が証明できない」という観点に結びついたことは、計算科学における計算可能性の概念考察としても、本質的な問題解決における分析と密接に関わってくるといえる。「何が計算でき、何が計算できない」から超数学的視点は「何が証明でき、何が証明できない」への視点を可能とした。いわば計算の本質に迫る道が開かれたといえるのである。

「フレーゲ=ヒルベルト論争」は以上の点においても、数学と言語を結びつける論理学においての新たな哲学的考察の余地を与えているといえることができる。

参考文献

- [1] H. Weyl. *Philosophie der mathematik unt Naturwissenschaft* R. Oldenbourg, 1927. (*handbuch der Philosophie, bearbeitet von Alfred Baeumler [et al]; herausgegeben von A. Baeumler unt M. Schroter*).
- [2] D. Hilbert. *Grundlagen der Geometrie*.1899. (REIPZIG und BERLIN VERLAG und DRUCK von B.G.TEUBNER.1922).
- [3] G.Frege. *Über die Grundlagen der Geometrie*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung,12.1903, pp319-324,pp368-375. (*Kleine Schriften*,hrsg von. Angelelli 1967, Georg Olms Vrlag 1990, pp281-323).