

コルモゴロフ複雑性について

井深真悟 (Shingo Ibuka) ・ 菊池誠 (Makoto Kikuchi)
神戸大学大学院工学研究科

コルモゴロフ複雑性は、1960年代末に A. Kolmogorov, R. Solomonoff, G. Chaitin らによって創始されたアルゴリズム情報理論がもたらした概念で、記号列の複雑さ（情報量）を定義する関数である。定義にはいくつかの流儀があるが、ここでは記号列 s に対する複雑性 $K(s)$ を次のように与える：

$K(s) = n$ を出力するプログラム n のうち最小のもの。

ここではプログラムをアスキーコードなどを通して自然数と見ている。 K は実際にはプログラミング言語に依存した関数ではあるが、言語の選択の影響は本質的でないとされている [4]。

コルモゴロフ複雑性に関して次のような不完全性現象が発見されている：公理 T に対してある定数 c があって、 T からは、

「……は c 以上のコルモゴロフ複雑性を持つ」

という形の命題は証明することができない。ただし、 T は健全で、計算可能で、コルモゴロフ複雑性を表現できる（算術を含んでいる等）と仮定している。このような c の最小値 c_T を **Chaitin の characteristic constant** と呼ぶことにしよう。 c_T 以下の複雑性を持つ記号列は有限個しかないので、無限に多くの真なる命題が証明できないことになる。

この不完全性定理の変種は 1970 年代に Chaitin [1] によって発見され、次の “heuristic principle” とともに一般によく知られるようになった：

「公理よりも情報量の大きな定理は証明することができない。」

この解釈はもともと Chaitin 自身が与えたものであったが、後に自身で、多くの数学の定理の一般向けの解説と同じ程度には偽りが込められているものであると述べている。しかし、この解釈は Chaitin の不完全性定理の通俗的な “哲学的解釈” として定着し、批判を受けた。M. Lambalgen [2] はこの解釈を characteristic constant を用いて定式化し、characteristic constant が公理だけでなくプログラミング言語の選び方から影響を受けることを指摘した。Raatikainen [3] はそれを数学的に精緻した形で述べた：公理の characteristic constant が 0 になるようなプログラミング言語はいつでも存在するし、またプログラミング言語の選び方次第で、際限なく characteristic

constant は大きくなってしまふことを証明した。

さらに Raatikainen [3]は, Chaitin の characteristic constant を分析し, 次の予想によって, それが何によって決定されるのを明らかにしようとした。

予想 (Raatikainen)

Chaitin の Characteristic constant は次の r_T と一致する。

r_T = プログラム n は停止せず, さらに停止しないことが T では証明できないような n のうち最小のもの

r_T を **Raatikainen の characteristic constant** と呼ぶことにしよう。我々は, Raatikainen の characteristic constant の性質, とくに Chaitin のものとの関係を調べた。Raatikainen の予想は,

$$r_T \leq c_T \quad \text{かつ} \quad c_T \leq r_T$$

ということであったが, 前者に証明を与え, 後者には反例を与えた。特に, プログラミング言語の選び方によって, r_T と c_T の差を際限なく大きくできることを示した。

また Raatikainen の characteristic constant が 2 つの公理を峻別しうる条件を特定した。Raatikainen の characteristic constant は公理の証明能力をいくらか反映するものであるが, 実は 2 つの公理 T, T' は単に強さが異なるというだけでは, (どんなプログラミング言語に対しても) Raatikainen の characteristic constant は一致してしまう場合がある。しかしながら, Π_1 と呼ばれる種類の命題が T' で証明でき T で証明できないのであれば, $r_T < r_{T'}$ となるようなプログラミング言語が存在し, またその時に限って存在することを示した。

さらに, 同様に Π_1 -命題の差がある 2 つの公理 T と T' に対して, Raatikainen の characteristic constant は異なるが, Chaitin の characteristic constant が一致する, すなわち,

$$r_T < r_{T'} \quad \text{しかし} \quad c_T = c_{T'}$$

となるようなプログラミング言語の存在を示した。

(桔梗宏孝との共同研究)

参考文献

- [1] Chaitin, G.J.: Information-theoretic limitations of formal systems. Journal of the ACM 21, pp.403-424 (1974)
- [2] van Lambalgen, M.: Algorithmic information theory. Journal of Symbolic Logic, 54, pp.1389-1400 (1989)
- [3] Raatikainen, P.: On interpreting Chaitin's incompleteness theorem. Journal of Philosophical Logic, 27, No.6, pp.569-586 (1998)
- [4] Vitanyi, P. and Li, M.: An Introduction to Kolmogorov Complexity and Its Applications, Second Edition. Springer-Verlag (1997)