構成主義的に見る数学的構造

久木田水生
龍谷大学　非常勤講師

本発表では，数学的構造主義を構成主義の枠組みの中で定式化する可能性を検討したい．数学的構造主義とは，点や数などの個々の数学的対象はそれ自体としてはいかなる内的な特徴も持たない抽象的な「場所」・「位置」であり，それらはある数学的構造の中での諸関係によってのみ同定・規定される，と主張する立場である．この立場が提唱される背景には，数学の公理系はそれを満たすモデルがどのような対象を含むかということについて何も語らない，という認識がある．実際にある公理系を満たすようなモデルは複数考えられ，そのどれか一つを正しいモデルとする根拠は公理系の内部（あるいは数学の内部）には存在しない．従って例えばペアノ算術に現れる「0」は何か特定の対象を指すのではなく，自然数のなす構造の中の一つの場所を指す，と考えられるのである．

この主張を体系的な理論に作り上げるためには，数学的構造とはそもそも何かということを含め，答えを与えるのが困難な多くの問題に取り組まなければなければならない．例えば Geoffrey Hellman は成熟した構造主義が答えるべき問題として次の五つを挙げている：

(1) どのような原始的な概念と，背景となる論理が採用されるのか．
(2) 考慮される枠組みについての前提（主張的公理 assertory axioms）はいかなるものか．
(3) 対象としての構造は消去されるのか．そうでなければ（数学的）構造とは何か．
(4) 数学的構造の存在はどのような前提から導かれるのか．また数学的構造のなす宇宙の無際限な拡張可能性はいかにして説明されるか．
(5) 構造への言及，あるいは構造への認識的アクセスはどのように理解され，説明されるのか．

Hellman によるこの定式化，およびこれら（および類似の問題）に対する構造主義者たちの取り組みを検討してみると，彼らが数学的構造をある理論・公理系に対する（独立した）モデルとして捉えているということ，そして構造主義を主張するためには任意の（整合的あるいは論理的に可能な）理論・公理系に対応する構造（モデル）が存在するという前提が必要になると考えていることが明らかになる．このことは Shapiro や Hellman がある種の包括原理を要請していることに顕著である．その原理は，Shapiro においては「整合的な coherent」任意の理論に対してそれに対応する数学的構造が存在する，という主張として，Hellman においては「想像しうる

conceivable」任意の状況に対して，その状況が成立するならば，私たちが認識できるだろう構造が存在する，という主張として表現されている．

しかし何故すべての理論がモデルを持つということを彼らは要請しなければならないのだろうか．これは，おそらく彼らが，受け入れられている数学の定理はその理論と独立に存在する何かについて真なる命題を述べているのでなければならない，と考えているためだろう（この点は特に Resnik に顕著である）．そのため例えばある理論において a = b が証明されたら，実際 a と b がどこかに存在するモデルの中の同一の対象を指示していなければならない，と彼らは考えるのである．

このような数学の言語に対するモデル理論的解釈はあまりにも広く受け入れられているため，数学の哲学における議論においてしばしばはっきりと意識されないままに前提されている．しかしながら多くの場合，私たちが扱う具体的な理論においてはこのような前提は不要である．例えば論理学においては，論理式自体が推論規則や公理よって定められる関係（論理的帰結関係）を持つ構造をなす．従って論理学の理論を充足する最も自明な数学的構造は当の理論そのものである．同様に構成的に定められる言語（式の集合）と公理の集合を持つ理論は，それ自体が数学的構造を持ち，自己充足的である．もちろんその理論が私たちにとって既に馴染み深い数学的構造――例えば何らかの代数や位相空間など――をモデルに持つならば，それは興味深く重要な数学的事実である．しかしそれはアプリオリに要請されることではない．

もし Shapiro の「整合性」や Hellman の「想像可能性」が，構成可能性を意味するのであれば，彼らの要請する包括原理は端的に不要である．そして少なくとも Hellman の提唱する「様相的構造主義」は，構成主義的に定式化しなおすことも可能であるように思われる（ただし Hellman 自身はそう考えていない）．このように考えることは必ずしも，数学の言語に対する形式主義，唯名論を含意しない．モデル理論的な解釈を与えなくとも，言語が意味を持つと考えることは可能である．しかしその意味とは指示対象や真理値といった通常の形式的意味論が想定するようなものではない．ある理論における式の意味は，その理論の規則や公理によって定められた他の式との関係において定まる．従ってここで私がその可能性を検討したい構造主義とは，理論はなんらかの数学的構造をモデルとして持つという意味での構造主義ではなく，理論に現れる式の集まりそれ自体が構造を持ち，それらの式の意味は意味論的規約によってではなく，その理論自体の構造において定まる，という意味での構造主義である．