ボーデの法則は微分方程式の解

新村公剛（Kimitake Shinmura）
新村公剛公認会計士事務所

今日、ボーデの法則は単なる経験則で片付けられている。しかし、シュレディンガー方程式からベッセル微分方程式及びオイラーの微分方程式を通じてボーデの法則を導き出したのがこの論文である。海王星を除き、ボーデの法則は太陽からの各惑星の平均距離 a 天文単位が近似的に以下の数列で表される式である。

$$a=0.4+0.3*2^{n} \qquad (n=-\infty,0,1,2,\cdots) \qquad (1)$$

まず、直角座標（x、y）と極座標（r、θ）との関係のラプラシアンΔの代入等より、自由粒子のシュレディンガー方程式は、波動関数φ、ディラック定数ℏ、質量 m 及びエネルギーE として

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}*\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}*\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}\right)=E\phi \qquad (2)$$

で、さらに、（2）式に変数分離法 $\phi=R(r)S(\theta)$ を仮定する等、定数を μ^2 として

$$\frac{r^2}{R(r)}\frac{d^2}{dr^2}R(r)+\frac{r}{R(r)}\frac{d}{dr}R(r)+\frac{r^2}{R(r)}k^2R(r)=-\frac{1}{S(\theta)}\frac{d^2}{d\theta^2}S(\theta)=\mu^2 \qquad (3)$$

を得、さらに、周期的条件の代入等より、

$$\mu=n \qquad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots) \qquad (4)$$

で、（3）式の変数分離した R(r)の式に $\mu=n$ を代入等し、変数変換 x=kr（x は無次元である）等より、

$$\frac{d^2}{dx^2}R(x)+\frac{1}{x}\frac{d}{dx}R(x)+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)R(x)=0 \qquad (5)$$

で、(5)式はベッセルの微分方程式である。(5)式を級数解法で解くと、解 R(x)は、

$$R(x)=C_0x^n\left\{1-\frac{1}{n+1}*\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1}{2(n+2)(n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^4\right.$$

$$\left.-\frac{1}{6(n+3)(n+2)(n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^6+\cdots\right\} \qquad (6)$$

で、n→大の時、{　}の中の第２項以下は無視でき、R(x)は、

$$R(x)=C_0x^n \qquad (7)$$

であるが、n が大の場合だけでなく、小の場合にも適用できる微分方程式を求める。（5）式のベッセルの微分方程式の右辺を０ではなく、R(x)を置くと、

$$\frac{d^2}{dx^2}R(x)+\frac{1}{x}\frac{d}{dx}R(x)+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)R(x)=R(x) \qquad (8)$$

それから、右辺の R(x)を左辺に移項して

$$\frac{d^2}{dx^2}R(x)+\frac{1}{x}\frac{d}{dx}R(x)-\frac{n^2}{x^2}R(x)=0 \qquad (9)$$

で、(９)式はオイラー（コーシー）の微分方程式で、(９)式と以下の(１０)式と

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{a}{x}\frac{dy}{dx}+\frac{b}{x^2}y=0 \qquad (10)$$

を比べて、Ｒ（ｘ）＝ｙ として、　$a=1$、$b=-n^2$ である。$x=e^u$に変数変換して、オイラー（コーシー）の微分方程式のモデルは、

$$\frac{d^2y}{du^2}+(a-1)\frac{dy}{du}+by=0 \qquad (11)$$

である。上記の(11)式に、$a=1$、$b=-n^2$を代入すると、

$$\frac{d^2y}{du^2}-n^2y=0 \qquad (12)$$

で、簡単な定係数の微分方程式になる。この式の一般解は、

$$y=R(x)=C_0e^{un}+C_1e^{-un}=C_0x^n+C_1x^{-n} \qquad (13)$$

で、この式はx＝0で無限大となるので、$C_1=0$である。$C_1=0$を上式に代入すると、

$$R(x)=C_0e^{un}=C_0x^n \qquad (14)$$

で、(１４)式は$x=0$の時、R(0)は ０ で無意味、$x=1$の時、R(1)はｎのいずれの値でも同一の値C_0で無意味である。ｘ＝０、１を境界条件として採用する。

まず、境界条件$x=0$の時、このＲ（０）を太陽と水星の距離０．４天文単位とし、Ｒ（０）を０にしないため、(１４）式のC_0x^nにｃを加えて、

$$R(0)=0.4=c+C_0*0^n=c \qquad (15)$$

で、ｃが求まる。c＝0. 4天文単位である。

次に、境界条件$x=1$の時、この距離Ｒ（１）を太陽と金星の距離０．７天文単位とし、(１４）式のC_0x^nに０．４を加えた式に代入すると、

$$R(1)=0.7=0.4+C_0*1^n=0.4+C_0$$

$$C_0=0.3\text{天文単位} \qquad (16)$$

で、境界条件x＝1は、x^0、即ち、n＝0という境界条件でもある。

最後に、地球はn＝1で、太陽と地球の距離1天文単位である。（１４）式の C_0x^nに0. 4を加えた式に、Ｒ（ｘ）＝１及び $C_0=0.3$を代入すると、

$$R(x)=1=0.4+0.3*x^1$$

$$x=2\text{(無次元)} \qquad (17)$$

地球と同じ方法で各惑星の ｘ を求めると、海王星以外は、xは2である。よって、(15)式の$c=0.4$、(１６)式の$C_0=0.3$及び(17)式のx＝2を（１４）式のC_0x^nにｃを加えた式に代入すると、太陽と各惑星の距離Ｒ（２）は、

$$R(2)=0.4+0.3*2^n \qquad (18)$$

を得、(18)式は、頭初で述べた(1)式のボーデの法則である。　　　　以　上