

## 第二不完全性定理とヒルベルト・プログラム

秋吉 亮太  
慶應義塾大学

ヒルベルトによって前世紀初頭に提唱されたいわゆるヒルベルト・プログラムがゲーデルの不完全性定理によって実行不可能なものとして打ち砕かれた，という記述は現在さまざまな所で見られる．こうした記述は数学の哲学，論理学，数学基礎論の専門書のみならず，一般向けに書かれた本にさえ存在する．

ヒルベルト・プログラムは数学の基礎付けを目指す一大プロジェクトであり，数学を基礎付ける為には，数学の無矛盾性のある限定された，認識論的に安全とされる論法のみが許される立場（有限の立場）で証明することで十分であることを主張する．本発表で扱うのは，このヒルベルト・プログラムと第二不完全性定理を巡る問題である．

本発表の構成は以下の通りである．まず，ヒルベルト・プログラムをごく簡単に概説する．ただし，発表中でも触れる通り，ヒルベルト・プログラムの細かい解釈については未だ議論が続いているので，いわば最大公約数的なヒルベルト・プログラムの記述を行う事になる．

次に，ゲーデルの第二不完全性定理を用いてヒルベルト・プログラムの実行不可能性を示したとされる，標準的な議論を正確に定式化する．この定式化を通じて，標準的議論が依拠しているある前提（「導出条件テーゼ」）を分析することが出来る（尚，この定式化はヒルベルト・プログラムの細かい解釈には中立的な形でなされる）．ヒルベルト・プログラムの実行不可能性を主張するには，（必ずしも形式化を必要としないインフォーマルな数学である）有限の立場で当該の形式的体系の無矛盾性が証明できないことを示す必要がある．これに対して，第二不完全性定理が主張するのは（当該の形式的体系が無矛盾ならば）無矛盾性（を意図して構成された形式的）言明の（その体系における）証明不可能性である．故に，第二不完全性定理からヒルベルト・プログラムの実行不可能性を導出するためには，インフォーマルな数学における証明不可能性とフォーマルな数学における証明不可能性を結びつける必要がある．先に述べた導出条件テーゼはこの二つの証明不可能性を橋渡しする役割を果たすのである．

従って，第二不完全性定理からヒルベルト・プログラムの実行不可能性を導くためには，この導出条件テーゼの正当化が必要となる．故に，本発表の主要な課題はこのテーゼの擁護を目指す三つの議論を吟味する事である．最初の二つの議論については擁護できないことを示し，三つ目のクライゼルに由来する議論については（適切に議論を補えば）擁護可能であると結論付ける．