逆二＋逆三乗とベルトランの定理

山　本　文　隆

長崎県立長崎工業高校

１．はじめに

「ベルトランの定理」とは ”中心力系の閉軌道においてアプス角が軌道半径に関わらず一定なら、その引力法則はベキ型の逆二乗か調和型（比例）に限られる ” というものである。そして宇宙法則が万有引力を選んだ理由の１つもここにあるといわれる。しかしこの定理の基本の式は非ベギ型の逆二乗＋逆三乗を充たす。さらに逆二乗＋逆三乗の公式は基本円半径（通径／２）R、離心率ｅ、方向θを用いると　ｒ＝R／（１－ｅｃｏｓｋθ）と逆二乗（ｋ＝１、遠日点方向からの角θ）よりも優雅である。さらにこの力による軌道は０＜ｅ＜１で近日点移動曲線や多角星（仮称）を描く閉軌道である。またアプス角は軌道半径に関係はするが、個々の基本円（直径は通径）運動からの変形に関しては有限一定（π／ｋ）である。水星の近日点移動率も正確に導け多角星はド・ブロイ波を類推させる。これらの事から自然界は元々逆二乗＋逆三乗で構成されていたとは考えられないだろうか。

２．ベルトランの定理のあらまし　　（ ベルトランの定理は次の過程をる。）

Ⅰ．運動の第一積分公式２つ（面積積分（角運動量保存）、エネルギー積分（力学的エネルギー保存））から求まる式を微分し＜軌道微分方程式＞を導くと

ｆを中心力、ｈを面積速度（$h = r^2\dot{\theta}$）、$u = 1/r$（ｒは動径）として

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u - \frac{f}{h^2u^2} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

Ⅱ．円運動を設定し次に微妙に乱れた円運動を仮定。　$u = u_0 + x$　（$x/u_0 \ll 1$）

（円運動：①より　$u_0 = f_0 / h^2 u_0^2$ ・・・・・・・・・・・・・②）

$U(u) = f/u^2$　として軌道の微分方程式は

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} + u_0 + x = \frac{u_0^3}{f_0} U(u_0 + x) \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

Ⅲ．乱れた円運動の一次の近似を行う（一次の理論）

（③式の右辺）　$u_0 + \frac{u_0}{U(u_0)} U'(u_0)\, x$　　（一次の近似・・④）　より

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} + m^2 x = 0 \quad \left(m^2 = 1 - \frac{u_0 U'(u_0)}{U(u_0)} \right) \cdots ⑤$$

ここでｍがu_0（あるいは中心からの距離r_0）によらないなら

$U'/U = (1 - m^2)/u$・⑥　（Ｕ‘はＵの時間微分）

の式を充たさなければならない。この式の解はベルトランによればμを任意定数として

$U = \mu u^{1-m^2}$　（ 力と動径では　$f = \mu / r^{3-m^2}$ ）・・・・・・⑦

結論１：⑤～⑦より、アプス角１８０／ｍが引力中心からの距離によらない（ｒは無

理数も充たすので閉軌道にならない）ためには、その型はベキ型でなければならない。

Ⅳ．乱れた円運動の三次の近似を行う（高次の理論）

一次の理論より中心力はベキ型とされ，さらに三次の理論から（途中省略）

$$2\mu^2 u_0^{-2m^2-1} m^4 (m^2-1)(m^2-4)=0 \cdots\cdots ⑧$$

の条件が導かれる。この式を満たすmは　m＝０（アプス角　無限大）→ 逆三乗　、m＝１（アプス角１８０°）→ 逆二乗、m＝２（アプス角　９０°）→ 調和型（比例）の３っつで、このうちアプス角無限大はアプス角がないに等しい（軌道開曲型）

結論２：ベキ型の中で満たされるべき引力法則は逆二乗か調和型のどちらかである。

以上、結論１，２よりベルトランの定理が示される（宇宙法則の謎（堀源一郎著、丸善））

３．＜逆二乗＋逆三乗＞の中心力の解析

ところで非ベギ型の逆二乗＋逆三乗の中心力も恒等的に⑤式を満たす。 mの値に関係なく自然法則に調和している。これを示す。軌道の微分方程式①に逆二乗＋逆三乗の式

$B/r^2 \times (1+S/r)$　　を代入、整理して（質量は単位質量とする）

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+\left(1-\frac{BS}{h^2}\right)u-\frac{B}{h^2}=0 \cdots\cdots ⑨$$

ここで、逆二乗＋逆三乗の力で回転する基本円の等速円運動（回転速度ｖ）を考えると、中心力と遠心力の釣り合いより　$Bu_0^2(1+Su_0)=v^2u_0$ ・・・・・・ ⑩

両辺u_0^3で割り$h=v/u_0$(面積速度)を用い　$B/u_0+BS=v^2/u_0^2=h^2$（・⑩’）

⑩’式をh^2で割り変形しk^2を用いて　$k^2=1-BS/h^2=B/u_0h^2$ ・・・・ ⑪

⑨式に⑪式を代入整理し　$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+k^2(u-u_0)=0 \cdots\cdots ⑫$$

ところで乱れた円運動では　$u=u_0+x$（$x \ll 1$）であるから⑫式は乱れた円運動の⑤式と全く等価の式である。すなわち逆二乗＋逆三乗の式はm（m＝k）の値に関係なく恒等的にベルトランの示した乱れた楕円の一次の近似式の条件を満たしている。

なお⑪式右辺からk（＝m、$2\pi/m$はアプス角）は軌道半径に関係していることがわかる。中央の式でhは面積速度あるいは単位質量あたりの角運動量であるから一見定数に見えるが、それは個々の基本円（直径が通径）運動からの変形に関してのみ（４.）である。

４．逆二乗においても面積速度（角運動量）は基本円半径の関数（各惑星で異なる）

（１）基本円運動と変形した楕円軌道は同じ面積速度（角運動量）を持つ。

基本円半径R、回転速度ｖとおけば動径$r=R/(1-e\cos\theta)$、動径垂直速度$r\theta=V_\perp=v(1-e\cos\theta)$であるから、２×面積速度＝$rV_\perp=Rv=h$＝一定

（２）基本円運動と変形した楕円軌道はケプラーの第三法則を満たし同じ重力定数Bを持つ

楕円の長半径$a=R/(\sqrt{1-e^2})^2$、周期$T'=T/(\sqrt{1-e^2})^3$

$$a^3/T'^2=R^3/T^2=RU^2/4\pi^2=B/4\pi^2$$

（∵　$B/R^2=v^2/R$　基本円において　万有引力＝遠心力　$B=Rv^2$）

（３）逆二乗も基本円半径Rによって（惑星の種類によって）面積速度は変化する

$BR=h^2$　（Bはすべての惑星に共通な重力定数だからhはRの平方根で変化）

ベルトランはhを定数として法則を導いたが、導かれた逆二乗のhも元々Rの関数である。

ベルトランの定理において「アプス角がu_0（$=1/r_0$）に関係しない場合」という条件は根本的におかしい。なお逆二乗＋逆三乗において　$B(R+S)=h^2$　の関係がある。