19 世紀の解析学の厳密化とは何か

中根美知代（Michiyo NAKANE）
立教大学・日本大学理工学部非常勤講師

1. はじめに

19 世紀の微分積分学の歴史は、「厳密化」という言葉で語られることが多い。確かに Cauchy の『解析学教程』(1821 年)以降、ε-δ 論法による極限概念の記述、微分や極限の存在への関心、一様連続性や一様収束性、至るところ微分不能な連続関数の認識など、それまでにはない精緻な概念が問題にされることが多くなり、それらをまとめて、今日見るような微分積分学が出来上がっていった。Cauchy の議論の不備は、早くも 19 世紀半ばには見つかり、克服されていったので、「Cauchy は Weierstrass よりは厳密でないが、それ以前よりは厳密」と評価され、より厳密な理論を求めて数学が進歩していくかのように歴史が描かれている。

数学者達は、いつの時代でも、十分「厳密」と判断して自分たちの成果を発表しているはずである。しかし、厳密性が時間とともに高まっていく概念ならば、過去の数学者の不備は納得できる。一方で、「数学とは厳密な学問である」と言われることも多く、古代以来の数学者は、現代から見ての厳密性を認識していたようにも思える。そうであるならば、19 世紀の数学者たちは、なぜその水準にまで練った議論を発表しなかったのだろうか。本報告では、厳密といわれる概念が形成されていった過程を検討することにより、19 世紀数学史で言われる「厳密化」が何を意味しているかを検討していく。

2. Cauchy のいう「厳密化」

Cauchy は『解析学教程』の序文で、「幾何学の厳密さ」を基準として解析学を展開することを強調していた。これは、定義と公理から出発して、推論により演繹的に理論を展開するという、Euclid 幾何学の方法に従うことである。実際彼は、極限を定義し、それに基づいて、無限小を定義している。彼の定義によって無限小の曖昧な性質は取り除かれたとは考えにくいが、この定義の提出以来、無限小の曖昧さがそれほど大きな問題にならず受け入れられるようになった。また、無限級数についても、有限項からの類推で判断するのではなく、しっかりした証明を与えため、収束という概念が明確になった。

彼が「幾何学の厳密さ」で表現したことは２つの意味を持っている。一つは公理の上に議論を基礎付けることであり、これを厳密と呼ぶならば、Cauchy 以降の微積分の教科書で、その精度が上がったという様子はない。もう一つは、Cauchy がより強調している、「しっかりした証明」である。これが厳密性の基準とし、時代とともに変化するものと捉えるならば、今日から見て、Cauchy は過去の誰よ

りも厳密だが、後の人よりもその度合いが落ちるという評価も可能であろう。そのように判断できるのだろうか。

3.「厳密化」の進展の状況

「厳密化」の中で登場してきたとされる概念の中から、Cauchy の言明にかかわる成果に注目しよう。「連続関数列の無限和は、連続関数である」という命題については、1847 年、Seidel が一様収束に相当する概念を入れてそれを修正した。また Cauchy が定義した積分は、連続関数で定義されているが、実際は一様連続関数でないと定義されない。「閉区間上の一様連続関数は連続」であることを証明して、Cauchy の理論を補完したのは Dirichlet で、1854 年の講義においてであった。いずれも ε - δ 不等式の手法を使えば、Cauchy の不備が指摘できるので、後の数学者が Cauchy の成果を厳密にしたといわれる。

Abel による Cauchy の定理への反例を知ったため、Seidel は Cauchy の証明を検討し、一様収束に相当する概念に達した。Dirichlet は Cauchy の知らない関数に出会っていたので、それを Cauchy の議論に組み込もうとして証明を再検討した。そのような反例や関数を知らない Cauchy にとっては、自分の理論は十分厳密であっても、彼らにはそうではなった。反例を挙げる、新たに知りえた関数をすでにある定理に適用してみるという作業が、それまでの証明の見直しを進め、修正していった。すなわち、新しい反例や具体的な関数の登場によって、「厳密な理論」が変化していったのである。

実は Cauchy 自身、それまで信じられていた微分可能性と冪級数展開可能性が一致しない例に出会っていた。これが、彼を厳密さの段階へと導いた要因であろう。Cauchy は自分が新しい段階に達したことを自覚して、自分の理論がそれまでにない「厳密性」を備えていることを強調したのであろう。しかし、それがいずれ乗り越えられることを自覚していたとは思えない。

4. おわりに

Cauchy が厳密という言葉で表現していた 2 種類の概念は、異なる特徴を持っていた。ひとつは、ユークリッド幾何学にならった演繹的な理論構成で、これは Cauchy の時点で、現代と同水準の厳密性の度合いに達していた。もうひとつは、証明の確かさで、それは時がたつにつれて厳密になっていった。そして数学史の研究では、後者の意味を取って、19 世紀の解析学の歴史を「厳密化」と称したのである。

数学のさまざまな場面で厳密という言葉は使われている。しかし、その具体的な意味づけが複数ありうることは容易に察せられる。そして、19 世紀の歴史的考察から、厳密性と呼ばれる概念の中には、今日達成されている「厳密な議論」が、今後の数学の進展によっては、厳密ではなくなる可能性を持つものがあることが示唆される。「厳密」というのは、「正しい」という概念に類似している。「一度証明された数学の命題は未来永劫に正しい」としばしば言われているが、「正しい」という概念についても、同様な検討がなされる余地があろう。